

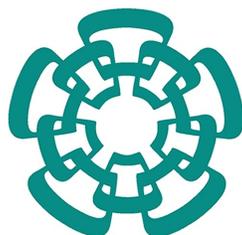
# Algoritmo amortizado para el número de cruces rectilíneos sobre gráficas completas

POR

FRANK RODRIGO DUQUE

TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE

MAESTRO EN MATEMÁTICAS



Departamento de Matemáticas

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

del Instituto Politécnico Nacional

México

# Introducción

Al dibujar una gráfica  $G$  en el plano, es común encontrar aristas que no se cruzan con ninguna otra. También cabe la posibilidad encontrar alguna arista, que intercepte a muchas de las demás. Por otra parte, si una gráfica  $G$  representa un circuito, en el cual los nodos juegan el papel de terminales, y las aristas las conexiones entre estas, los dibujos de  $G$ , están biunívocamente relacionados con los posibles diseños del circuito. En el diseño de circuitos electrónicos, vías, redes (y demás problemas de diagramas de interconexión), la cantidad de intersecciones, en el dibujo de su gráfica relacionada influye directamente en los costos asociados. Generando así la necesidad de encontrar dibujos en el plano con reducida cantidad de intersecciones.

Dado un dibujo de  $G$ , en el cual algún par de aristas se interceptan, en algunas ocasiones podemos redibujar a  $G$  de forma que este cruce desaparezca. Disminuyendo así el número de intersecciones. En otras ocasiones, por más que intentemos disminuir la cantidad de cruces de aristas, este valor puede haber llegado a su límite. Pero, ¿cuál es este límite?

Si bien, el problema de saber si una gráfica puede ser dibujada en el plano, sin intersecciones de aristas, es bastante fácil, el conocer el valor exacto de este límite es más difícil.

Como caso particular trataremos el caso donde  $G$  es una gráfica completa, y las aristas en los dibujos de  $G$  están compuestos por segmentos de recta. De esta forma, al dibujar la gráfica completa en el plano, ésta queda completamente determinada por la distribución de sus vértices; eliminando así la necesidad de considerar las posibles formas de trazar las aristas.

Cuando la gráfica a dibujar tiene seis vértices o menos, fácilmente se pueden analizar las posibles configuraciones. Esto ayudándonos de algunos argumentos sobre las distribuciones de los puntos, y encontrar el dibujo que minimiza la cantidad de intersecciones de aristas.

Para las gráficas cuyo conjunto de vértices está entre 7 y 27 puntos y para la gráfica  $K_{30}$ , el problema es más complicado. Gracias a algunos teoremas de cotas inferiores y otras heurísticas para encontrar buenas configuraciones de puntos, se ha encontrado el valor mínimo para la cantidad de intersecciones de aristas.

Para las demás gráficas completas, la brecha entre las cotas inferiores, dadas por los teoremas y las cotas superiores, dadas por los buenos dibujos de las gráficas completas, es bastante más considerable. Una de las razones para esto, es el rápido crecimiento del número de posibles configuraciones; sin embargo

hay un punto a favor, esto es que al perturbar un poco los buenos dibujos, el número de cruces no cambia mucho; es más, en algunas ocasiones disminuye. Ésto nos da una idea muy simple para mejorar los dibujos, la cual consiste en perturbar aleatoriamente las configuraciones existentes y analizar si la nueva cantidad de cruces de aristas es más pequeña. Lo complicado del método, es que posiblemente se tengan que testar muchas configuraciones de puntos hasta encontrar una mejora. El centro de esta memoria se encuentra en el final del capítulo 3, donde presentamos un algoritmo que permite calcular rápidamente el número de intersecciones de aristas, al mover un punto sobre un conjunto de posibles posiciones.

Aunque este problema se puede plantear fácilmente como un problema de Teoría de Gráficas, también está relacionado con otras áreas como la Geometría Combinatoria y Computacional. En el primer capítulo, presentamos algunas nociones básicas para la lectura de esta memoria; estas las separamos en tres secciones. En la primera, llamada teoría de gráficas presentamos el concepto de gráfica y algunos términos relacionados con ésta. En la segunda, llamada geometría combinatoria, definimos posición general, tipo de orden, y número de cuadriláteros convexos, términos que se utilizaran frecuentemente a lo largo de esta memoria. En la tercera sección llamada algoritmos, presentamos la notación  $\Theta$  y  $O$ , fundamentales para comprender lo referente a tiempos de ejecución de algoritmos, en especial de los que trataremos acá.

En el segundo capítulo, se concentra la información referente al estado del arte del problema del número de cruces rectilíneos. Éste está dividido en cinco secciones. En la primera sección, llamada historia del número de cruces rectilíneos, mostramos la evolución del problema, desde que Paul Turán en tiempos de la segunda guerra mundial, lo planteó para el caso no rectilíneo en gráficas bipartidas, hasta su versión rectilínea en gráficas completas. En la segunda sección, llamada relaciones con cuadriláteros convexos y los cuatro puntos de Sylvester, mostramos la equivalencia entre el problema del número de cruces rectilíneos, y el de minimizar la probabilidad de encontrar cuadriláteros convexos en el plano, tanto sobre nubes de puntos, como sobre conjuntos abiertos no necesariamente convexos. En la tercera sección, llamada  $k$ -conjuntos, rectas medianas y secuencias circulares; definimos los conceptos de  $k$ -arista,  $k$ -conjunto y rectas medianas, tanto para el caso usual de las distribuciones de puntos en el plano, como para sus equivalentes en el espacio de las secuencias circulares. Mostramos además de algunas relaciones entre éstos y con el problema del número de cruces rectilíneos. En la cuarta sección, llamada cota inferior para  $\overline{cr}(n)$  y su valor exacto para  $n \leq 27$ , con ayuda de los resultado de la sección anterior, calculamos una cota inferior para el número de rectas medianas. Posteriormente encontramos los valores de  $\overline{cr}(n)$  con  $n \leq 27$  y una buena cota inferior para  $n \neq 30$  entre 28 y 100. Para finalizar el capítulo, en la quinta sección, llamada construcción de dibujos de  $K_n$ , presentamos una construcción para encontrar dibujos con muchas rectas medianas, a partir de un dibujo base. Posteriormente mostramos una modificación a esta construcción, para obtener dibujos con baja cantidad de cruces de aristas; construcción que permite obtener una cota superior para el valor asintótico del número de cruces, y para el de los cuatro

puntos de Sylvester.

El tercer capítulo gira entorno al algoritmo presentado en la segunda sección. Este permite calcular en tiempo amortizado  $O(n \log(n))$ , la cantidad de cruces de aristas, al mover un punto sobre una lista de  $n$  candidatos. En la primera sección presentamos un algoritmo para calcular el número de cruces en tiempo  $O(n^2 \log(n))$ , esto desde un punto de vista diferente, haciendo un puente entre este algoritmo y el de la segunda sección. En la tercera sección, presentamos las cotas superiores para  $\overline{cr}(n)$ , obtenidas al buscar nuevos dibujos de  $K_n$ , usando los dos algoritmos anteriores.

# Agradecimientos

Al Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV) y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico proporcionado que me permitió realizar este trabajo.

A todos los que han estado conmigo durante la realización de mi maestría. En especial a mis padres José Rodrigo Duque y Blanca Nohora Patiño, a mis hermanos Sergio Alejandro Duque y Luisa Fernanda Duque; por todo el amor, interés y apoyo, que siempre me han brindado. A Marcela Marín por que a pesar de la distancia siempre estuviste a mi lado, haciendo más llevaderos esos momentos de soledad y tristeza, y más bonitos aquellos de sueños y alegrías, te quiero mucho mi amor.

A todas las personas que influyeron en mi formación académica y personal durante este periodo de estudios en México. De manera muy especial a mi asesor el Dr. Ruy Fabila Monroy, por introducirme en el apasionante mundo de la geometría combinatoria y computacional, y por dirigir mi trabajo de grado.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>7</b>
<b>2. Problemas relacionados</b>	<b>10</b>
2.1. Historia del número de cruces rectilíneos. . . . .	10
2.2. Relaciones con cuadriláteros convexos y los cuatro puntos de Sylvester . . . . .	14
2.3. $k$ -conjuntos, rectas medianas y secuencias circulares. . . . .	17
2.4. Cota inferior para $\overline{cr}(n)$ y su valor exacto para $n \leq 27$ . . . . .	23
2.5. Construcción de dibujos de $K_n$ . . . . .	28
<b>3. Algoritmos y observaciones.</b>	<b>36</b>
3.1. Número de cruces rectilíneos en $O(n^2 \log(n))$ . . . . .	36
3.2. Número de cruces rectilíneos en $O(n \log(n))$ amortizado. . . . .	37
3.3. Cotas superiores para el número de cruces rectilíneos . . . . .	40

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos conceptos, necesarios para una buena lectura de los capítulos siguientes. Estos conceptos los separaremos en tres secciones, teoría de gráficas, geometría combinatoria y algoritmos. Para más detalles pueden consultarse los textos [11, 10, 22].

### Teoría de Gráficas

**Definición 1.** Una **Gráfica**, es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de puntos, y  $E$  un conjunto de pares no ordenados en  $V \times V$ . Usualmente a los elementos de  $V$  los llamamos **vértices**, nodos o puntos; mientras que a los elementos de  $E$  los llamamos **aristas** o líneas. Dada una gráfica  $G$ , denotamos por  $V(G)$  y  $E(G)$ , los conjuntos de vértices y aristas respectivamente. Si se sobreentiende la gráfica en cuestión, denotaremos estos conjuntos simplemente por  $V$  y  $E$ . A la cantidad de vértices en  $V$ , la llamamos el **orden** de  $G$ ; mientras que la cantidad de aristas en  $E$ , la llamamos el **tamaño** de  $G$ .

**Definición 2.** Diremos que una arista  $e$ , **incide** en un vértice  $v$ , o que  $v$  es un vértice de  $e$ ; si  $v$  pertenece a  $e$ . Llamamos **adyacentes** o vecinos, a un par de vértices de una gráfica  $G$ ; si el par formado por ellos es una arista en  $G$ . El **grado** de un vértice, es la cantidad de vértices adyacentes a él. Una gráfica donde todos sus vértices son adyacentes, la llamamos **gráfica completa**; y si ésta tiene  $n$  vértices, la denotamos por  $K_n$ .

**Definición 3.** Si dos gráficas  $G$  y  $G'$ , cumplen que  $V(G') \subseteq V(G)$  y  $E(G') \subseteq E(G)$ ; decimos que  $G'$  es una **subgráfica** de  $G$ , y lo denotamos por  $G' \subseteq G$ . Dada una gráfica  $G$ , un conjunto  $V' \subseteq V(G)$  y una subgráfica  $G'$  de  $G$ ; decimos que  $G'$ , es la subgráfica de  $G$  **inducida** por  $V'$ ; si  $V(G') = V'$ , y todas las aristas de  $G$  con sus dos vértices en  $V'$ , también son aristas de  $G'$ .

**Definición 4.** Una gráfica  $G = (V, E)$  de orden  $n \geq 0$ , la llamamos camino si

$$V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \text{ y } E = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n\}.$$

Si  $G$  resulta de un camino al agregarle la arista  $x_n x_0$ , decimos que  $G$  es un ciclo. Si una gráfica de orden  $n$  es un ciclo, ésta se denota por  $C_n$ .

**Definición 5.** Dada una gráfica  $G$ , decimos que ésta es **conexa**; si para todo par de vértices  $u$  y  $v$ , existe un camino  $P$ , como subgráfica de  $G$ , que contiene a  $u$  y  $v$  en su conjunto de vértices. A una subgráfica de  $G$  conexa, la llamamos **componente conexa**; si ésta es maximal con respecto al número de vértices. Si una gráfica  $G$ , además de ser conexa, no contiene ciclos como subgráfica; entonces decimos que  $G$  es un árbol.

**Definición 6.** Una **gráfica dirigida**, es un par  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto de puntos, y  $E$  un conjunto de pares ordenados en  $V \times V$ . Al estar conformado el conjunto de aristas, por pares ordenados, se pueden interpretar las aristas con una dirección; de esta forma la arista  $x_1 x_2$  la trataremos como una arista dirigida de  $x_1$  a  $x_2$ .

## Geometría combinatoria

**Definición 7.** Sea  $P$  un conjunto de puntos en el plano. Decimos que  $P$  está en posición general, si en  $P$  no hay tres puntos colineales.

**Definición 8.** Sea  $P$  un conjunto de puntos en posición general. El **número de cuadriláteros convexos** en  $P$ , es la cantidad de cuádruplas en  $P$ , cuya envoltura convexa es un cuadrilátero.

**Definición 9.** Sean  $P$  y  $Q$  dos conjuntos de  $n$  puntos en el plano en posición general. Diremos que  $P$  y  $Q$ , tienen el mismo **tipo de orden**; si éstos se pueden indexar como  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  y  $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ , tal que para todo  $i, j, k$  entre 1 y  $n$ ; el punto  $p_k$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $p_i$  a  $p_j$ ; si y solo si,  $q_k$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $q_i$  a  $q_j$ . El tipo de orden permite saber, si dos conjuntos de puntos son combinatoriamente iguales.

## Algoritmos

Supongamos que queremos ordenar en forma creciente, una lista de  $n$  números. Nos podemos idear diferentes métodos para ordenarlos; pero naturalmente, métodos diferentes, ocasionan cantidades diferentes de pasos al llevarlos a cabo. Supongamos que tenemos dos métodos  $A$  y  $B$  para ordenar  $n$  números, y que estos requieren  $\frac{n^2}{10}$  y  $10n$  pasos respectivamente. A pesar de que las constantes en estas expresiones intervienen a favor del método  $A$ ; el factor cuadrático de éste influye demasiado para valores grandes de  $n$ , ocasionando que para valores de  $n$  mayores que 1000, sea bastante más rápido el método  $B$  que el método  $A$ . De lo anterior, podemos notar que las constantes no fueron tan importantes; para valores grandes de  $n$ , es mucho más relevante el valor asintótico. A continuación definimos las notaciones  $\theta$  y  $O$ , las cuales nos permiten simplificar la

escritura de algunas funciones, cuando solo estamos interesados en sus valores asintóticos.

- Dadas dos funciones  $f(n)$  y  $g(n)$ , decimos que  $f(n) = \theta(g(n))$ ; si existen constantes  $c_1$ ,  $c_2$  y  $n_0$ , tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumple que

$$c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$$

- Dadas dos funciones  $f(n)$  y  $g(n)$ , decimos que  $f(n) = O(g(n))$ ; si existen constantes  $c$ , y  $n_0$ , tal que para todo  $n \geq n_0$  se cumple que

$$f(n) \leq cg(n)$$

En cuanto al problema de ordenación; algoritmos como el Merge sort y el Heapsort; pueden ordenar  $n$  objetos, dotados de un orden total, en  $\theta(n \log(n))$  pasos. Otro algoritmo bastante popular es el Quicksort; para el cual, a pesar de que en el peor caso puede tardar  $\theta(n^2)$  pasos; en la práctica funciona bien, pues el valor esperado para la cantidad de pasos es  $\theta(n \log(n))$ .

Una herramienta necesaria, para los algoritmos descritos en el capítulo 3; es el poder ordenar rápidamente un conjunto de puntos por ángulo, alrededor de un punto dado. El primer requisito para esto; se logra al calcular si un punto  $(r_1, r_2)$ , se encuentra a la izquierda o derecha de la recta dirigida de  $(p_1, p_2)$  a  $(q_1, q_2)$ ; cálculo que se puede lograr rápidamente, al determinar el signo del determinante

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix}$$

De esta forma, tenemos una relación de orden, base para ordenar puntos por ángulo alrededor de otro punto. Después de esto, es suficiente con aplicar uno de los algoritmos clásicos; para obtener un algoritmo que ordene un conjunto de  $n$  puntos; por ángulo, alrededor de un punto dado, en tiempo  $O(n \log(n))$ .

## Capítulo 2

# Número de cruces rectilíneos y problemas relacionados.

### 2.1. Historia del número de cruces rectilíneos.

Pocos conceptos de matemáticas, tuvieron sus orígenes en los campos de trabajo durante la segunda guerra mundial. Ese fue el inicio del problema de número de cruces, también conocido como el problema de la fábrica de ladrillos[7]. Este problema fue planteado por primera vez, por el matemático húngaro Paul Turán en su primera publicación en la *Journal of Graph Theory*, en la cual además del problema de la fábrica de ladrillos, también describe sus inconvenientes en los campos de trabajo.

*In July, 1944 the danger of deportation was real in Budapest and a reality outside Budapest. We worked near Budapest, in a brick factory. There were some kilns where the bricks were made and some open storage yards where the bricks were stored. All the kilns were connected by rail with all the storage yards. The bricks were carried on small wheeled trucks to the storage yards. All we had to do was to put the bricks on the trucks at the kilns, push the trucks to the storage yards, and unload them there. We had a reasonable piece rate for the trucks, and the work itself was not difficult; the trouble was only at the crossings. The trucks generally jumped the rails there, and the bricks fell out of them; in short, this caused a lot of trouble and loss of time which was rather precious to all of us (for reasons not to be discussed here). We were all sweating and cursing at such occasions, I too; but nolens-volens the idea occurred to me that this loss of time could have been minimized if the number of crossings of the rails had been minimized. But what is the minimum number of crossings? I realized after several days that the actual situation could have been improved, but the exact solution of the general problem with  $m$  kilns and  $n$  storage yards seemed to be very difficult... [24]*

*En julio de 1944, el peligro de la deportación era real en Budapest y una realidad fuera de Budapest. Trabajamos cerca de Budapest, en una fábrica de ladrillos. Hubo algunos hornos donde se hicieron ladrillos y algunos patios donde estos se almacenaron. Todos los hornos estaban conectados por líneas de ferrocarril con todas las zonas de almacenamiento. Los ladrillos se transportaron en pequeños camiones con ruedas a los patios. Todo lo que teníamos que hacer era mover los ladrillos de los hornos a los camiones, empujar los camiones a las zonas de almacenamiento y descarga de allí. Tuvimos un precio razonable por pieza para los camiones, el trabajo en sí no era difícil, el problema era sólo en los cruces. Allí generalmente los camiones se salían de los rieles, y los ladrillos caían con de ellos, en fin, esto causó un montón de problemas, entre estos una gran pérdida de tiempo para todos nosotros (por razones que no se discutirán aquí). Todos sudábamos y maldecíamos en estas ocasiones, yo también, pero se me ocurrió una idea, que esta pérdida de tiempo podría haber sido minimizada si se hubiera reducido al mínimo el número de cruces de los carriles. Pero ¿cuál es el número mínimo de cruces?. Después de varios días me di cuenta de que la situación actual se podría haber mejorado, pero la solución exacta del problema general con  $m$  hornos y  $n$  patios de almacenamiento parecía ser muy difícil ...*

Así, el problema de Turán sobre la fábrica de ladrillos con  $m$  hornos y  $n$  patios, se puede interpretar como el número de cruces necesarios para dibujar a  $K_{m,n}$  en el plano; motivando de esta forma la definición del número de cruces de una gráfica  $G$ , como el mínimo número de cruces necesario para dibujar a  $G$  en el plano.

**Definición 10.** Sea  $G$  una gráfica. Diremos que  $H$  es un **dibujo de  $G$** , si  $H$  es un dibujo en el plano compuesto por puntos y líneas, de forma tal, que a cada punto le corresponde un vértice de  $G$ , y las líneas están en relación biunívoca con las aristas, donde cada línea une un par de puntos si y solo si su arista correspondiente incide en los vértices correspondientes a este par. Además  $H$  también debe cumplir que: sus líneas son curvas de Jordan, sus puntos están en posición general, no hay puntos correspondientes a vértices en el interior de cualquier línea, y que no hay tres líneas que se intercepten en un mismo punto, a menos que este punto corresponda a un vértice de  $G$ . Dada la relación entre líneas y aristas, y entre puntos y vértices, en algunas ocasiones haremos referencia a estos puntos y líneas como aristas y vértices.

**Definición 11.** El **número de cruces** de una gráfica  $G$ , denotado por  $cr(G)$ , es el mínimo número de cruces que aparecen en un dibujo de  $G$ . En la figura 2.1.1, se ilustra un dibujo de  $K_8$  que minimiza el número de cruces.

Un tiempo después de terminada la guerra, Turán siguió comunicando el problema de la fábrica de ladrillos a otros matemáticos. Así en octubre de 1952, durante la primera visita de Turán a Polonia, el problema llegó a oídos del topólogo Kazimierz Zarankiewicz, el cual publica su solución del problema en *Fundamenta Mathematicae* [26] el 15 de diciembre de 1952. Pero esta solución

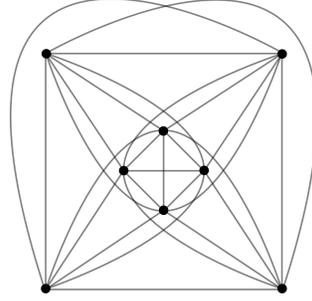


Figura 2.1.1:  $K_8$

tenia un error, fue así que la solución planteada por Zarankiewicz se convierte el la conjetura de Zarankiewicz.

**Conjetura 12.** (Zarankiewicz) *El mínimo número de cruces para la gráfica bipartita completa es:*

$$cr(K_{p,q}) = \lfloor p/2 \rfloor (p - \lfloor p/2 \rfloor - 1) \cdot \lfloor q/2 \rfloor (q - \lfloor q/2 \rfloor - 1)$$

Aunque no todo estaba perdido, posteriormente se probó que la conjetura es válida para  $p \leq 6$ ,  $p \leq 8$  y  $q \leq 10$ [15, 25].

Por los años 50's, el problema del número de cruces había llegado a oídos de varios matemáticos, incluso a otros personajes que no eran matemáticos, como es el caso del artista británico Anthony Hill. Como complemento a sus labores artísticas, Hill despierta un gran interés por el estudio del número de cruces en gráficas completas, interés que se vio reflejado en la construcción de varios dibujos, los cuales como resultado lo llevaron a la siguiente conjetura.

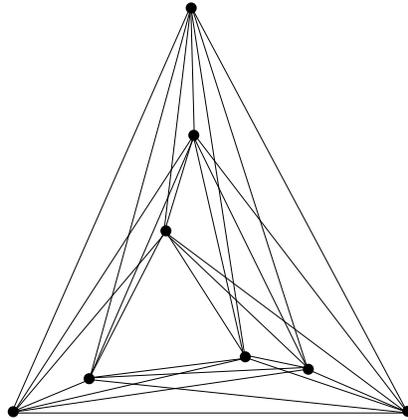
**Conjetura 13.** (Hill) *El mínimo número de cruces en la gráfica completa  $K_n$  es*

$$\begin{aligned} (1/64)(n-1)^2(n-3)^2 & \quad \text{para } n \text{ impar} \\ (1/64)(n)(n-2)^2(n-4) & \quad \text{para } n \text{ par} \end{aligned}$$

Esta fórmula, no solo fue verificada para los primeros 12 valores de  $n$ , sino que además, en 1964 con una variación de las construcciones de Hill, Blazek y Koman demostraron que era válida como cota superior[9].

Entre los años 30's y 40's, Klaus Wagner e István Fáry probaron independientemente, que toda gráfica planar, también se puede dibujar en el plano con todas sus aristas dibujadas como líneas rectas. Siguiendo esta idea, en 1958 Anthony Hill definió el número de cruces rectilíneos  $\overline{cr}(G)$ , como el mínimo número de cruces necesarios para dibujar una gráfica  $G$  en el plano, de forma que todas sus líneas sean segmentos de recta.

**Definición 14.** Sea  $G$  una gráfica. Diremos que  $H$  es un *dibujo rectilíneo* de  $G$ , si  $H$  es un dibujo de  $G$  con todas sus aristas como segmentos de recta.

Figura 2.1.2:  $K_8$ 

**Definición 15.** El *número de cruces rectilíneos* de una gráfica  $G$ , denotado por  $\overline{cr}(G)$ , es el mínimo número de cruces que aparecen en todo dibujo rectilíneo de  $G$ . En la figura 2.1.2 se ilustra un dibujo rectilíneo de  $K_8$  que minimiza el número de intersecciones.

Al tener el número de cruces, un conjunto más amplio de posibilidades, que el número de cruces rectilíneos; se tiene la desigualdad  $cr(G) \leq \overline{cr}(G)$ . Además, luego de comprobarse la igualdad de estos dos valores para gráficas completas de  $n$  vértices, con  $n \leq 7$  y  $n = 9$ , podría pensarse que el número de cruces y el número de cruces rectilíneos, son iguales para gráficas completas en general. Esta idea se cayó rápidamente cuando Frank Harary y Anthony Hill[16], mostraron que la gráfica completa de ocho vértices tiene número de cruces rectilíneos igual a 19 (figura 2.1.2), mientras que el número de cruces en el caso no rectilíneo es igual a 18 (figura 2.1.1). Aunque esta idea no se perdió del todo, en [8] Dan Bienstock y Nate Dean probaron que en toda gráfica con número de cruces menor o igual que tres, este valor coincide con el número de cruces rectilíneos.

Cabe notar, que el número de cruces rectilíneos no es un problema del todo aislado del número de cruces en general. En lo siguiente de este trabajo, nos enfocaremos en el estudio del número de cruces rectilíneos sobre gráficas completas. Particularmente, en la próxima sección veremos las relaciones entre el problema del número de cruces rectilíneos, el problema de los cuadriláteros convexos y el problema de los cuatro puntos de Sylvester.

**Problema 16.** Dado un natural  $n$ , el **problema del número de cruces rectilíneos** (sobre  $K_n$ ), denotado por  $\overline{cr}(n)$ , se trata de encontrar el mínimo valor para la cantidad de intersecciones, sobre todos los dibujos rectilíneos de la gráfica completa de  $n$  vértices.

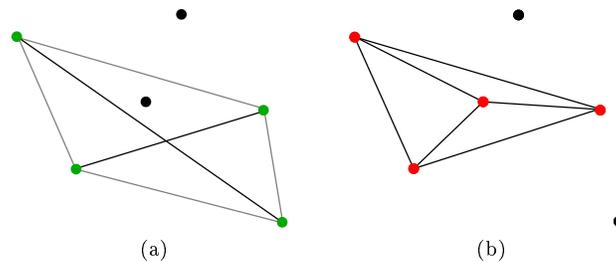


Figura 2.2.1: Envoltura convexa de cuatro puntos

## 2.2. Relaciones con cuadriláteros convexos y los cuatro puntos de Sylvester

Consideremos un conjunto de  $n$  puntos en el plano, dotado con la distribución de probabilidad uniforme. Si tomamos tres de estos puntos, con probabilidad 1 su envoltura convexa será un triángulo. Si tomamos cuatro puntos, con probabilidad 1 la envoltura convexa es un triángulo o un cuadrilátero. Si quisiéramos una distribución de puntos, que maximice la probabilidad de que al tomar cuatro puntos, su envoltura convexa sea cuadrilátero; bastaría con tomar los  $n$  puntos sobre una circunferencia, de esta forma, cualquier subconjunto de cuatro puntos me generaría un cuadrilátero convexo. El inverso de este problema resulta ser bastante mas complicado. Supongase que queremos encontrar una distribución de puntos, que me minimice la probabilidad de encontrar cuadriláteros convexos; para lograr esto, el principal objetivo sería encontrar una distribución de puntos que tenga pocos cuadriláteros convexos. En este caso nos enfrentaríamos al problema de los cuadriláteros convexos propuesto por Erdős y Guy en [20].

**Problema 17.** El **problema de los cuadriláteros convexos**, denotado por  $\square(n)$ ; se trata de encontrar el mínimo número de cuadriláteros convexos, sobre los conjuntos de  $n$  puntos en posición general.

Aunque aparentemente se ven diferentes, la relación entre los problemas 16 y 17 es bastante directa; observando las figuras 2.2.1a y 2.2.1b podemos ver que, cuatro puntos generan un cuadrilátero convexo, si y solo si entre las aristas generadas por estos cuatro puntos, aparece exactamente una intersección de aristas. Por tanto tenemos la siguiente igualdad.

$$\overline{c}(n) = \square(n)$$

Así, el problema de encontrar una distribución de puntos que minimice la cantidad de cuadriláteros convexos, se traduce en encontrar una que minimice el número de cruces rectilíneos.

Continuando con la misma idea, supongamos ahora, que queremos estudiar la probabilidad de encontrar cuadriláteros convexos sobre regiones del plano. Para mayor claridad, supongamos que estas regiones consisten en conjuntos  $R$

abiertos y Lebesgue medibles, con medida finita. Ahora, el valor que nos interesa estudiar, es la probabilidad  $q(R)$  de obtener un cuadrilátero, al tomar la envoltura convexa de cuatro puntos, escogidos de  $R$  de forma independientemente y con probabilidad uniforme.

Como primera consideración tendríamos el caso en que  $R$ , además de lo anterior también es una región convexa. En este caso, según [21] tendríamos que  $\frac{2}{3} \leq q(R) \leq 1 - \frac{35}{12\pi^2}$  donde el mínimo valor se alcanza sobre un triángulo, y el máximo sobre un círculo.

Si consideramos ahora el caso no necesariamente convexo, a la hora de maximizar a  $q(R)$ , podemos aproximar  $R$  a un arco de circunferencia y así tendríamos que  $q(R)$  se aproxima a 1. En el caso no necesariamente convexo, la verdadera dificultad esta al la hora de minimizar a  $q(R)$ ; este problema corresponde al problema de los cuatro puntos de Sylvester, y como veremos a continuación en los teoremas 19 y 20 su respuesta coincide con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}}$ .

**Problema 18.** El **problema los cuatro puntos de Sylvester**, consiste en encontrar el valor de  $q^* = \inf \{q(R)\}$ , donde  $R$  varía sobre los conjuntos abiertos y Lebesgue medibles con medida finita.

**Teorema 19.** [23] *Existe una constante  $\nu$  tal que  $0 < \nu < \infty$  y*

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}} = \sup_n \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}}$$

*Demostración.* Por ser  $\overline{cr}(n)$  menor que  $\binom{n}{4}$ , la sucesión  $A_n = \overline{cr}(n)/\binom{n}{4}$  esta acotada por 1. por tanto, para mostrar el teorema 19, es suficiente con ver que la sucesión  $A_n$  es monótona no decreciente.

Sean  $m, n$ , y  $H$ , con  $m < n$  y  $H$  un dibujo rectilíneo de  $K_n$ , tal que  $\overline{cr}(H) = \overline{cr}(n)$ . Sea  $B$  una subgráfica inducida de  $H$  por un conjunto de  $m$  vértices, así  $\overline{cr}(B)$  representa la cantidad de intersecciones de aristas que resultan en  $B$ .

Como cada intersección de aristas en  $H$  esta caracterizada por 4 puntos, hay en total  $\binom{n-4}{m-4}$  subgráficas inducidas de  $H$  con  $m$  vértices que contienen una misma intersección. Según lo anterior, al contar todas las intersecciones, sobre las posibles subgráficas inducidas de  $H$  con  $m$  vértices, tenemos que cada intersección de aristas en  $H$ , la hemos contado en  $\binom{n-4}{m-4}$  veces, es decir

$$\binom{n-4}{m-4} \overline{cr}(H) = \sum_{|B|=m} \overline{cr}(B)$$

Ahora, como  $\overline{cr}(H) = \overline{cr}(n)$  y  $\overline{cr}(B) \geq \overline{cr}(m)$  entonces

$$\binom{n-4}{m-4} \overline{cr}(n) \geq \binom{n}{m} \overline{cr}(m)$$

y, al despejar  $\overline{cr}(n)$  y utilizar la identidad  $\frac{\binom{n}{m}}{\binom{n-4}{m-4}} = \frac{\binom{n}{4}}{\binom{m}{4}}$  obtenemos  $A_n \geq A_m$  □

**Teorema 20.** *La constante del problema de Sylvester (problema 18) coincide con el límite cuando  $n$  tiende a infinito del número de cruces rectilíneas*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}} = q^*$$

*Demostración.* Primero veamos que  $\overline{cr}(n) \leq \binom{n}{4} q^*$ , para lo cual es suficiente con mostrar que para todo  $R$ ,  $\overline{cr}(n) \leq \binom{n}{4} q(R)$ .

Sea  $R$  como en el problema 18, y sea  $X$  una variable aleatoria, que cuenta la cantidad de cuadriláteros convexos por cada escogencia de  $n$  puntos de  $R$ , es decir

$$X = \sum_{\{p_a, p_b, p_c, p_d\} \in R} 1_{[p_a, p_b, p_c, p_d \text{ forman un cuadrilátero convexo}]}$$

donde  $1_{[p_a, p_b, p_c, p_d \text{ forman un cuadrilátero convexo}]}$  es la función indicadora, de cuando la envoltura convexa de los puntos  $p_a, p_b, p_c, p_d$  es un cuadrilátero.

Por un lado, tenemos que  $E(X)$  no puede ser menor que  $\square(n)$ , y por la equivalencia de los problemas 16 y 17  $\overline{cr}(n) \leq E(X)$ . Por otro lado, como  $E(X) = \binom{n}{4} q(R)$  entonces

$$\overline{cr}(n) \leq \binom{n}{4} q(R)$$

En el otro sentido, para mostrar que  $q^* \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{cr}(n) / \binom{n}{4}$ , mostraremos que para cada  $n$  existe una región  $R$  tal que  $q(R) \leq \overline{cr}(n) / \binom{n}{4} + f(n)$  donde  $f(n)$  es  $O(1/n)$ .

Sean  $n$  y  $H$ , donde  $H$  es un dibujo rectilíneo de  $K_n$ , tal que  $\overline{cr}(n) = \overline{cr}(H)$ . Sea  $R$  que consta de  $n$  bolas de radio  $\epsilon$  centradas en los vértices de  $H$ , donde  $\epsilon$  es lo suficientemente pequeño, tal que cuando cuatro puntos sean tomados de bolas diferentes, estos formen un cuadrilátero convexo, si y solo si los centros de las bolas lo hacen.

Ahora consideremos los siguientes eventos

- Evento  $A$ : los cuatro puntos están en bolas diferentes
- Evento  $B$ : la envoltura convexa de los cuatro puntos es un cuadrilátero.

Sea  $f(n)$  la probabilidad de que no ocurra  $A$ , de esta forma la probabilidad de que ocurra  $A$  es  $\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n}$  lo cual es  $1 - O(n)$  y por tanto  $f(n) = O(1/n)$ . Notemos que

$$\begin{aligned} q(R) &= P(A \wedge B) + P((\sim A) \wedge B) \\ &\leq [1 - f(n)] \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}} + f(n) \\ &\leq \frac{\overline{cr}(n)}{\binom{n}{4}} + f(n) \end{aligned}$$

□

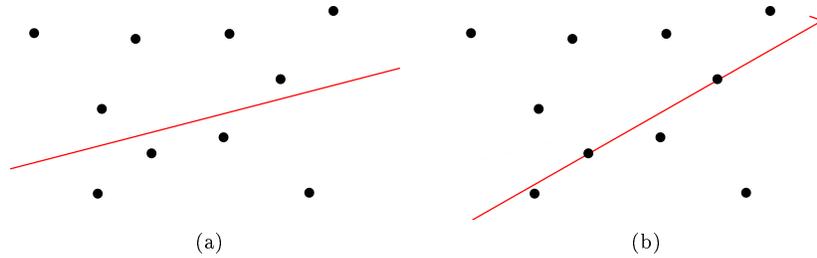


Figura 2.3.1: 4-conjunto y 3-arista

### 2.3. $k$ -conjuntos, rectas medianas y secuencias circulares.

Después de analizar el problema de los cuadriláteros convexos y el de los cuatro puntos de Sylvester, no es difícil convencerse de la relación tan directa entre, estos problemas y el del número de cruces rectilíneos. En esta sección, continuaremos con el estudio de problemas fuertemente relacionados con el número de cruces rectilíneos, más precisamente trataremos los conceptos de  $k$ -conjuntos,  $k$ -aristas y rectas medianas. Estos conceptos que fueron introducidos por Erdős, Lovász, Simon y Straus, en los setentas en [18] [19]. Debido a las relaciones entre ellos, y con el número de cruces rectilíneos; éstos, hoy forman parte de un conocido grupo de problemas en geometría combinatoria. Para estos problemas, a diferencia de la sección anterior, esta vez no tenemos una equivalencia tan directa con el problema 16.

**Definición 21.** Sean  $P$  un conjunto de puntos en el plano en posición general, y  $k$  un número entero entre 0 y  $(n-2)/2$ . Una  $k$ -arista, es una recta dirigida que pasa por dos puntos de  $P$ , y divide el conjunto de puntos en dos, de forma tal que el subconjunto de la derecha tiene exactamente  $k$  puntos. Denotaremos por  $E_k(P)$ , el número de  $k$ -aristas en  $P$ , y por  $E_{\leq k}(P)$  el número de  $t$ -aristas en  $P$  con  $t \leq k$ , es decir,  $E_{\leq k}(P) = \sum_{j=0}^k E_j(P)$ .

**Definición 22.** Sean  $P$  y  $k$  como en la definición anterior. Diremos que  $Q$  es un  $k$ -conjunto, si es un subconjunto de  $P$  de cardinalidad  $k$ , tal que existe una recta que separa a  $Q$  de los demás puntos de  $P$ .

**Problema 23.** Dados los enteros  $n$  y  $k$ , tales que  $k$  está entre 0 y  $n/2$ ; el **problema de los  $k$ -conjuntos**, trata sobre minimizar la cantidad de  $t$ -conjuntos con  $0 \leq t \leq k$ , sobre los conjuntos de  $n$  puntos en el plano.

Según las definiciones 21 y 22, es de esperarse una relación entre  $k$ -conjuntos y  $k$ -aristas. Efectivamente, como podemos ver en las figuras 2.3.1a y 2.3.1b, se puede rotar en sentido anti-horario una recta que divide un  $k$ -conjunto de los demás puntos, hasta convertir esta en una  $(k-1)$ -arista, de esta forma la relación entre los  $k$ -conjuntos y las  $(k-1)$ -aristas es biunívoca. Según lo anterior, dado

$n$  podemos replantear el problema de los  $(k+1)$ -conjuntos, como el problema de minimizar a  $E_{\leq k}(P)$ . A este mínimo los denotaremos por  $E_{\leq k}(n)$ .

Consideremos ahora una  $k$ -arista  $l$ , de un conjunto  $P$ , con  $n$  puntos en posición general. Como  $l$  divide a  $P$  en dos conjuntos  $A$  y  $B$ , con  $k$  y  $n-k-2$  puntos respectivamente; si consideramos todas las rectas que unen los puntos de  $A$  con los de  $B$ , tendríamos en total  $k(n-k-2)$  rectas y por tanto  $k(n-k-2)$  intersecciones con la recta  $l$ . Si en la consideración anterior, se mantuvieran aun las mismas intersecciones, al cambiar las rectas por solo los segmentos de recta entre dos puntos, y tendríamos entonces, la siguiente relación entre el número de cruces rectilíneos y la cantidad de  $k$ -aristas.

$$\overline{cr}(P) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k(n-k-2)E_k(P)$$

Sin embargo, al cambiar las rectas por segmentos de recta perdemos algunas intersecciones, y la igualdad anterior no se cumple. Esta barrera la lograron traspasar de forma independiente Lóvasz en [17] y, Ábrego y Fernández-Merchant en [4], llegando a las siguientes igualdades

$$\overline{cr}(P) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 2} (n-2k-3)E_{\leq k}(P) - \frac{3}{4} \binom{n}{3} + \frac{1+(-1)^{n+1}}{8} \binom{n}{2} \quad (2.3.1)$$

$$\text{o su equivalente } \overline{cr}(P) = 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k(n-k-2)E_k(P) \quad (2.3.2)$$

A continuación, reproduciremos la prueba dada por Lóvasz de 2.3.2, pues esta además del importante puente que crea entre dos problemas, también contiene algunas herramientas que usaremos en el capítulo siguiente para calcular el número de cruces rectilíneos.

**Teorema 24.** *Para todo conjunto  $P$ , de  $n$  puntos en el plano en posición general, tenemos la siguiente igualdad.*

$$\square(P) = 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{n-2} E_k(P) \cdot k \cdot (n-k-2)$$

*Demostración.* Sean  $\square(P)$  y  $\triangle(P)$ , la cantidad de cuadriláteros convexos y no convexos en  $P$ . Como la cantidad de cuadriláteros en  $P$  es  $\binom{n}{4}$ , entonces

$$\square(P) + \triangle(P) = \binom{n}{4} \quad (2.3.3)$$

Ahora contaremos la cantidad  $\phi$  de cuádruplas  $(u, v, w, z)$ , tales que la recta dirigida de  $u$  a  $v$ , intercepta a la recta que pasa por  $w$  y  $z$ ; notese que el orden de

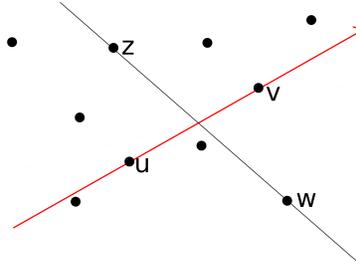


Figura 2.3.2: Cuádruplas 1

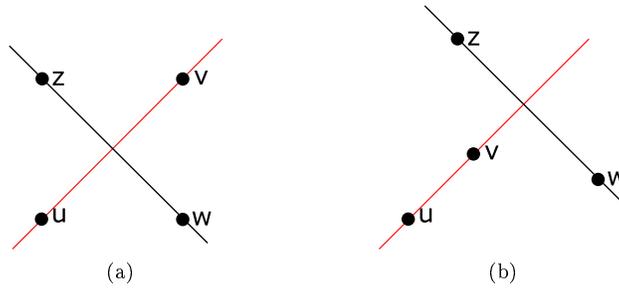


Figura 2.3.3: Cuádruplas 2

$u$  y  $v$  importa, mientras que el de  $w$  y  $z$  no. Primero contaremos  $\phi$  de la siguiente forma, por cada  $k$ -arista  $l$  con orientación de  $u$  a  $v$ , hay en total  $k \cdot (n - k - 2)$  formas de escoger a  $w$  y  $z$  de forma que la arista que pasa por ellos intercepta a  $l$  (figura 2.3.2), así tenemos que

$$\phi = \sum_{k=0}^{n-2} E_k(P) \cdot k \cdot (n - k - 2)$$

Para la segunda forma de contar a  $\phi$ , notemos que cada cuadrilátero convexo aporta 4 cuádruplas a  $\phi$ , mientras que cada cuadrilátero no convexo aporta 6 (figura 2.3.3); de esta forma tenemos que

$$4 \cdot \square(P) + 6 \cdot \triangle(P) = \phi = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n - k - 2)$$

y al reemplazar la ecuación 2.3.3 obtenemos

$$4 \cdot \square(P) + 6 \cdot \binom{n}{4} - 6 \cdot \square(P) = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n - k - 2)$$

por tanto

$$\begin{aligned}\square(P) &= \frac{6}{2} \binom{n}{4} - \frac{2}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} E_k(P) \cdot k \cdot (n-k-2) \\ \square(P) &= 3 \binom{n}{4} - \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} E_k(P) \cdot k \cdot (n-k-2)\end{aligned}$$

□

El siguiente problema de esta sección, se puede interpretar como un caso particular del problema de los  $k$ -conjuntos, pues en este el objetivo es maximizar la cantidad de  $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$ -aristas. Este problema es llamado el problema de las rectas medianas.

**Definición 25.** Sea  $P$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general. Una *recta mediana*, es una línea que pasa por dos de los puntos de  $P$ , y divide los demás en dos conjuntos del mismo tamaño; para el caso de  $n$  impar, la diferencia entre los tamaños de estos dos conjuntos, es de solo un punto. El número de rectas medianas presentes en  $P$  es denotado por  $h(P)$ .

**Problema 26.** El *problema de las rectas medianas*, consiste en encontrar  $h(n) = \text{máximo}\{h(P)\}$ , donde  $P$  varía sobre todos los conjuntos en posición general de  $n$  puntos.

A diferencia de los problemas anteriores, en este no tenemos una fórmula que nos relacione directamente los problemas 16 y 26. La relación entre el número de cruces rectilíneos, y el problema de las rectas medianas, es un poco más “romántica”. Desde sus comienzos, ambos problemas tuvieron inicios difíciles, hasta tal punto que en el año 2000, sus valores eran inciertos para valores de  $n$  que sobrepasaran un dígito. Aunque los dos seguían su travesía a su ritmo, sus caminos no podían seguir divididos mucho tiempo; bastó con dibujar sus conjuntos de puntos, para que se viera esa tendencia entre ellos a ser uno solo; no solo se encontraron distribuciones de puntos, que alcanzaban sus valores óptimos para cada uno de los dos problemas, sino que además, para los primeros 27 valores de  $n$ , únicos para los que se conocía el valor exacto del número de cruces rectilíneos hasta el año 2011, también se habían encontrado conjuntos de puntos, que solucionan los dos problemas al mismo tiempo. Estas son las únicas relaciones de las que se puede dar firmeza hasta ahora, pero en la última sección de este capítulo veremos otra relación entre estos problemas, esta trata de una heurística, para construir conjuntos de puntos con muchas rectas medianas, heurística que no demoró mucho tiempo en servirle al compañero de su problema de origen, el número de cruces rectilíneos, en la tarea de encontrar buenos conjuntos.

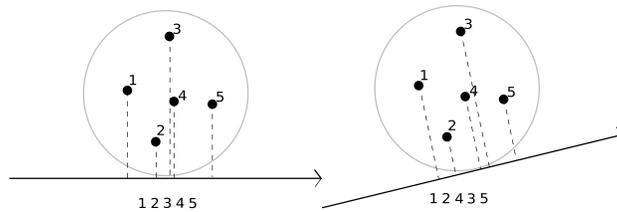


Figura 2.3.4: Secuencias circulares

En la búsqueda de nuevas herramientas, para el cálculo de cotas en los problemas de  $k$ -conjuntos, rectas medianas y número de cruces rectilíneos; una de las mejores ha sido interpretar estos problemas sobre un espacio más grande, en el cual no se trabaja con distribuciones de puntos, sino con subconjuntos de secuencias de permutaciones. Para concluir esta sección, introduciremos las secuencias circulares, sus relaciones con estos problemas, y algunos resultados importantes.

Sea  $P$ , un conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general, tal que al reunir los segmentos de recta que unen estos puntos, no hay dos segmentos paralelos. Sea  $l$  una recta dirigida, tal que todos los puntos de  $P$  se encuentran a la izquierda de  $l$ . Al proyectar los puntos de  $P$ , ortogonalmente sobre  $l$ ; obtenemos un orden para estos, digamos  $1, 2, \dots, n$ . Si giramos  $l$  en sentido anti-horario, y proyectamos nuevamente los puntos de  $P$ , eventualmente obtendremos una nueva permutación de  $[n] = (1, 2, \dots, n)$  (figura 2.3.4); continuando este proceso, al girar a  $l$   $180^\circ$  obtendremos una secuencia de  $\binom{n}{2}$  permutaciones, tal que dos permutaciones consecutivas difieren solo en dos posiciones seguidas, y además la última permutación es  $(n, n-1, \dots, 1)$ . Esto corresponde a un caso particular de las secuencias circulares, concepto introducido por Goodman y Pollack en [14], como una herramienta para codificar puntos en el plano.

**Definición 27.** Una secuencia  $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{\binom{n}{2}})$  de permutaciones sobre el conjunto  $[n]$ , es llamada secuencia circular si  $\pi_0 = (1, 2, \dots, n)$ ,  $\pi_{\binom{n}{2}} = (n, n-1, \dots, 1)$  y cualesquier dos permutaciones consecutivas, difieren en exactamente dos posiciones adyacentes.

Según lo anterior, a cada configuración de puntos en el plano, podemos asignarle una secuencia circular. Una pregunta natural es si esta relación es biunívoca, este interrogante fue resuelto por Pollack y Goodman en [14], al mostrar que la secuencia

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & 12534 & - & 21534 & - & 21354 & - & 21345 & - & 23145 & - & 32145 & - \\ & 32415 & - & 32451 & - & 34251 & - & 43251 & - & 43521 & - & \dots & \end{array}$$

no se puede representar geoméricamente; no obstante, además de esto también probaron que toda secuencia de a lo sumo cuatro valores, si se puede representar.

Nuestro interés principal es el estudio del número de cruces rectilíneos, y para continuar con este objetivo, definimos los puntos extremos en secuencias

circulares. Por medio de estos, establecemos una relación entre los cuadriláteros convexos, y las subsecuencias circulares de cuatro valores con cuatro puntos extremos.

**Definición 28.** Sean  $\Pi$  y  $\Pi^*$ , secuencias circulares con valores en  $[n]$  y  $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  respectivamente. Diremos que  $\Pi^*$  es una subsecuencia circular de  $\Pi$ , si  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  y  $\Pi^*$  resulta de  $\Pi$  al borrar en cada permutación, los valores que no están en  $S$  y las permutaciones repetidas.

**Definición 29.** Sean  $\Pi$  una secuencia circular con valores en  $[n]$ , y  $m$  un número entre 1 y  $n$ . Si  $m$  aparece en la primera o la última posición de alguna permutación, diremos que  $m$  es un punto extremo de  $\Pi$ .

**Definición 30.** Sean  $\Pi$  y  $\Pi^*$  secuencias circulares, con  $\Pi^*$  subsecuencia circular de  $\Pi$  con cuatro valores; diremos que  $\Pi^*$  es convexo, si sus cuatro valores son puntos extremos, en caso contrario diremos que  $\Pi^*$  es cóncavo.

Es claro que, dado un conjunto de puntos  $P$  y su secuencia circular asociada  $\Pi$ , los puntos en la envoltura convexa de  $P$  corresponden a puntos extremos de  $\Pi$ . Según esto, y gracias a que todas las secuencias circulares con cuatro valores son realizables geoméricamente, podemos asociarle a cada una de estas secuencias un cuadrilátero convexo o cóncavo, dependiendo si  $\Pi$  tiene tres o cuatro puntos extremos; obteniendo así una biyección entre los cuadriláteros en  $P$ , y las subsecuencias con cuatro valores y convexas de  $\Pi$ . Como consecuencia de esto, contar cuadriláteros convexos en  $P$  equivale a contar subsecuencias convexas de  $\Pi$  de cuatro valores.

**Definición 31.** El número de cruces para una secuencia circular  $\Pi$ , denotado por  $cr(\Pi)$ , es el número de subsecuencias de cuatro valores de  $\Pi$  que son convexas. El mínimo número de cruces, para secuencias circulares con valores en  $[n]$ , es denotado por  $\tilde{cr}(n)$ , y corresponde al mínimo valor de  $cr(\Pi)$ , donde  $\Pi$  varía sobre todas las secuencias circulares de  $n$  valores.

Otra observación importante, es que, dado un conjunto de puntos en el plano  $P$ , y  $\Pi$  su secuencia circular asociada; cada  $k$ -arista de  $P$ , corresponde a una permutación de  $\Pi$ , en la cual se intercambian los elementos en las posiciones  $k+1$  y  $k+2$ , o  $n-(k+1)$  y  $n-(k+2)$ . De esta forma podemos replantear los  $k$ -conjuntos y las rectas medianas en  $\Pi$ , de la siguiente forma.

**Definición 32.** Dada una permutación  $\pi$  de una secuencia circular  $\Pi$ , diremos que  $\pi$  es una  $k$ -transposición, si en  $\pi$  solo varían los elementos en sus posiciones  $k$  y  $k+1$  o  $n-k$  y  $n-(k+1)$ , con respecto a la permutación anterior. De esta forma  $E_k(\Pi)$  y  $\tilde{h}(\Pi)$ , denotan el número de  $k$ -transposiciones y  $\lfloor n/2 \rfloor$ -transposiciones en  $\Pi$  respectivamente. El valor máximo de  $\tilde{h}(\Pi)$ , sobre todas las posibles secuencias circulares  $\Pi$  con valores en  $[n]$ , es llamado el número de pseudo-rectas medianas, y es denotado por  $\tilde{h}(n)$ .

Al ser el espacio de las secuencias circulares sobre  $[n]$ , más grande que el de los conjuntos de  $n$  puntos en el plano en posición general, se obtiene que  $\overline{cr}(n) \geq$

$n$	14	16	18	20	22	23	24	25	26	27
$h(n)$	22	27	33	38	44	75	51	85	57	96

 Cuadro 2.1: Valores de  $h(n)$  mejorados con el corolario 36

$\tilde{c}r(n)$ ,  $h(n) \leq \tilde{h}(n)$ , y que el mínimo número de  $k$ -transposiciones es menor o igual que el de  $k$ -conjuntos. De esta forma al trabajar sobre las secuencias circulares se pueden obtener cotas para  $\overline{c}r(n)$  y  $h(n)$ , cosa que haremos en la próxima sección mediante el uso de los siguientes resultados[2].

**Teorema 33.** [6] Sean  $\Pi$  una secuencia circular sobre  $[n]$  y  $k \geq \lfloor n/3 \rfloor$ , entonces

$$E_{\leq k}(\Pi) \geq 3 \binom{k+2}{2} + 3 \binom{k+2 - \lfloor n/3 \rfloor}{2} - \max\{0, (k+1 - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)\}$$

**Teorema 34.** Sea  $\Pi$  una secuencia circular. Si  $s = s(k, \Pi)$  entonces

$$E_{\geq k}(\Pi) \leq 2(n - 2k - 1)E_{k-1}(\Pi) - \frac{s}{2}(E_{k-1}(\Pi) - n - 1)$$

**Corolario 35.** Sea  $\Pi$  una secuencia circular. Si  $s = s(k, \Pi)$  entonces

$$E_{\geq k}(\Pi) \leq (n - 2k - 1)E_{k-1}(\Pi) + \binom{s}{2} \leq (n - 2k - 1)(E(\Pi) + \binom{n - 2k - 1}{2})$$

Donde  $s(k, \Pi)$  esta definido de la siguiente forma. Dada una secuencia circular  $\Pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{\binom{n}{2}})$ , y un entero  $k$  tal que  $1 \leq k < n/2$ , los valores de cada  $\pi_j$  los podemos separar en tres conjuntos correspondientes a, los  $k$  valores iniciales,  $n - 2k$  valores centrales y últimos  $k$  valores de  $\pi_j$  respectivamente; el valor  $C(k, \pi_j)$  representa los  $n - 2k$  valores centrales de  $\pi_j$ , mientras que  $s(k, \Pi)$  representa

$$s(k, \Pi) = \min\{|C(k, \pi_0) \cap C(k, \pi_i)| : 0 \leq i \leq \binom{n}{2}\}$$

## 2.4. Cota inferior para $\overline{c}r(n)$ y su valor exacto para $n \leq 27$

Actualmente la mejor cota para el problema de las rectas medianas, en el caso general es  $cn^{\frac{4}{3}}$  donde  $c = (\frac{31287}{8192})^{\frac{1}{3}} < 1,5721$ . En el siguiente corolario se demuestra una mejor cota para  $\tilde{h}(n)$ , la cual coincide con la mejora la cota inferior conocida para  $h(n)$ , cuando  $8 \leq n \leq 184$ , esta además alcanza el valor óptimo para  $n \leq 27$ , extendiendo así la lista de los valores conocidos para el problema de las rectas medianas. En la tabla 2.1 se muestran algunos de estos valores .

**Corolario 36.** Si  $\Pi$  es una secuencia circular sobre  $[n]$  con  $n \geq 8$ , entonces

$$h(\Pi) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{1}{24}n(n+30) - 3 \rfloor & \text{si } n \text{ es par} \\ \lfloor \frac{1}{18}(n-3)(n+45) + \frac{1}{19} \rfloor & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

*Demostración.* Tomando  $k = \lfloor n/2 \rfloor - 1$  obtenemos  $E_{\geq k}(\Pi) = h(\Pi)$ , y así del corolario anterior

$$h(\Pi) \leq (n - 2(\lfloor n/2 \rfloor - 1) - 1)(E_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi)) + \binom{n - 2(\lfloor n/2 \rfloor - 1) - 1}{2} \quad (2.4.1)$$

$$\leq \begin{cases} E_{n/2-2}(\Pi) & \text{si } n \text{ es par} \\ 2E_{(n-1)/2-2}(\Pi) + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Como  $h(\Pi) + \sum_{t=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 2} E_t(\Pi) = \binom{n}{2}$ , entonces

$$E_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}(\Pi) = \binom{n}{2} - h(\Pi) + E_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 3}(\Pi) \quad (2.4.3)$$

y, al reemplazar en 2.4.2 y despejar  $h(\Pi)$  obtenemos

$$h(\Pi) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} E_{\leq n/2-3}(\Pi) \rfloor & \text{si } n \text{ es par} \\ \lfloor \frac{2}{3} \binom{n}{2} - \frac{2}{3} E_{\leq (n-1)/2-3}(\Pi) + \frac{1}{3} \rfloor & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

usando el teorema 33 con  $k = \lfloor n/2 \rfloor - 3$

$$E_{\leq \lfloor n/2 \rfloor - 3} \geq 3 \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{2} + 3 \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1 - \lfloor n/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (\lfloor n/2 \rfloor - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)\}$$

En el caso de  $n$  par obtenemos

$$\begin{aligned}
 h(\Pi) &\leq \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} [3(n/2 - 1)(n/2 - 2)/2 + 3(n/2 - 1 - \lfloor n/3 \rfloor)(n/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)/2 \right. \\
 &\quad \left. - (\frac{n}{2} - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)] \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} [3(n/2 - 1)(n/2 - 2)/2 + 3(n/2 - 1 - n/3 + (n/3 - \lfloor n/3 \rfloor)) \right. \\
 &\quad \left. \cdot (n/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)/2 - (\frac{n}{2} - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)] \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} [3(n/2 - 1)(n/2 - 2)/2 + 3(n/2 - 1 - n/3)(n/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)/2 \right. \\
 &\quad \left. + 3(n/3 - \lfloor n/3 \rfloor)(n/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor) - (\frac{n}{2} - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)] \right] \\
 &= \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} [3(n/2 - 1)(n/2 - 2)/2 + 3(n/2 - 1 - n/3)(n/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)/2 \right] \\
 &= \left[ \frac{n \lfloor n/3 \rfloor}{8} - \frac{3 \lfloor n/3 \rfloor}{4} + \frac{6n}{4} - 3 \right] \\
 &= \left[ \frac{n^2}{24} + \frac{5n}{4} - 3 + \left(-\frac{nt}{8} + \frac{3t}{4}\right) \right] \text{ con } 0 \leq t < 1 \\
 &\leq \left[ \frac{n^2}{24} + \frac{5n}{4} - 3 \right] \text{ Pues } n \geq 8 \\
 &\leq \frac{1}{24}n(n + 30) - 3
 \end{aligned}$$

y análogamente para  $n$  impar

$$\begin{aligned}
 h(\Pi) &\leq \left[ \frac{1}{2} \binom{n}{2} - \frac{1}{2} [3((n-1)/2 - 1)((n-1)/2 - 2)/2 + 3((n-1)/2 - 1 - \lfloor n/3 \rfloor) \right. \\
 &\quad \left. \cdot ((n-1)/2 - 2 - \lfloor n/3 \rfloor)/2 - \left(\frac{(n-1)}{2} - 2 - \lfloor n/3 \rfloor\right)(n - 3 \lfloor n/3 \rfloor)] \right] \\
 &\leq \frac{1}{18}(n-3)(n+45) + \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

□

Usando los teoremas 2.3.1 y 33, claramente se puede dar una cota inferior para  $\overline{cr}(n)$ . Esta cota se puede mejorar un poco, si para  $E_{\lfloor n/2 \rfloor - 2}$  usamos la fórmula 2.4.3 en lugar de 33, curiosamente esta cota alcanza el valor óptimo para  $n \leq 27$  (tabla 2.2). A continuación ilustramos el caso  $n = 24$ .

$$E_{\leq 10}(\Pi) = \binom{24}{2} - h(24) = 276 - 51 = 225$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 9}(\Pi) &\geq 3 \binom{11}{2} + 3 \binom{11 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (10 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(55) + 3(3) = 174
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 8}(\Pi) &\geq 3 \binom{10}{2} + 3 \binom{10 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (9 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(45) + 3(1) = 138
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 7}(\Pi) &\geq 3 \binom{9}{2} + 3 \binom{9 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (8 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(36) + 3(0) = 108
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 6}(\Pi) &\geq 3 \binom{8}{2} + 3 \binom{8 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (7 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(28) + 3(0) = 84
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 5}(\Pi) &\geq 3 \binom{7}{2} + 3 \binom{7 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (6 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(21) + 3(0) = 63
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 4}(\Pi) &\geq 3 \binom{6}{2} + 3 \binom{6 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (5 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(15) + 3(0) = 45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 3}(\Pi) &\geq 3 \binom{5}{2} + 3 \binom{5 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (4 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(10) + 3(0) = 30
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{\leq 2}(\Pi) &\geq 3 \binom{4}{2} + 3 \binom{4 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \text{máx}\{0, (3 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\
&= 3(6) + 3(0) = 18
\end{aligned}$$

$n$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\overline{cr}(n)$	0	1	3	9	19	36	62	102	153

$n$	13	14	15	16	17	18	19	21	30
$\overline{cr}(n)$	229	324	447	603	798	1029	1318	2055	9726

(a) Sin usar el corolario 36

$n$	20	22	23	24	25	26	27
$\overline{cr}(n)$	1657	2528	3077	3699	4430	5250	6180

(b) Usando el corolario 36

 Cuadro 2.2: Valores de  $\overline{cr}(n)$  conocidos

$$\begin{aligned} E_{\leq 1}(\Pi) &\geq 3 \binom{3}{2} + 3 \binom{3 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \max\{0, (2 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\ &= 3(3) + 3(0) = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\leq 0}(\Pi) &\geq 3 \binom{2}{2} + 3 \binom{2 - \lfloor 24/3 \rfloor}{2} - \max\{0, (1 - \lfloor 24/3 \rfloor)(24 - 3 \lfloor 24/3 \rfloor)\} \\ &= 3(1) + 3(0) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{cr}(24) &= \sum_{k=0}^{10} (21 - 2k) E_{\leq k}(\Pi) - \frac{3}{4} \binom{24}{3} \\ &\geq 1(225) + 3(174) + 5(138) + 7(108) + 9(84) \\ &\quad + 11(63) + 13(45) + 15(30) + 17(18) \\ &\quad + 19(9) + 21(3) - \frac{3}{4}(2024) \\ &= 3699 \end{aligned}$$

Siguiendo la idea anterior, dada una buena cota inferior para el problema de las rectas medianas, podemos inducir buenas cotas para el número de cruces rectilíneos. Desafortunadamente encontrar una buena cota para el número de rectas medianas, puede ser una tarea casi tan difícil como la de encontrarla para número de cruces rectilíneos, sin embargo la cota del teorema 34, puede ser mejorada un poco sin recurrir al problema de las rectas medianas, como muestra el teorema 37.

**Teorema 37.** *Para todo  $n$  y  $k$  tal que  $m - 1 \leq k \leq (n - 3)/2$  con  $m = \lceil (4n - 11)/9 \rceil$ , se tiene que  $E_{\leq k} \leq u_k$  donde*

$$u_{m-1} = 3 \binom{m+1}{2} + 3 \binom{m+1 - \lfloor n/3 \rfloor}{2} - 3(m - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor) \left( \frac{n}{3} - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \right)$$

$n$	$\overline{cr}(n) \geq$						
28	7233	46	59410	64	234223	82	649190
29	8421	47	65015	65	249732	83	682308
30	9723	48	70948	66	265888	84	716507
31	11207	49	77362	67	282974	85	752217
32	12830	50	84146	68	300767	86	789077
33	14626	51	91374	69	319389	87	827289
34	16613	52	99073	70	338913	88	866947
35	18796	53	107251	71	359311	89	866947
36	21164	54	115878	72	380531	90	950372
37	23785	55	125087	73	402798	91	994394
38	26621	56	134798	74	425980	92	1039840
39	29691	57	145030	75	450078	93	1086725
40	33048	58	155900	76	475305	94	1135377
41	36674	59	167344	77	501531	95	1185551
42	40561	60	179354	78	528738	96	1237263
43	44796	61	192095	79	557191	97	1290844
44	49324	62	205437	80	586684	98	1346029
45	54181	63	219457	81	617310	99	1402932

Cuadro 2.3: Cota inferior para  $\overline{cr}(n)$ 

$$u_k = \left[ \frac{1}{n-2k-2} \binom{n}{2} + (n-2k-3)u_{k-1} \right] \text{ para } k \geq m$$

Utilizando el teorema 37, junto al 33 y la ecuación 2.3.1, se obtiene una mejor cota inferior para el número de cruces rectilíneos, como también para su valor asintótico  $\overline{cr}(n) \geq \frac{277}{729} \binom{n}{4} + \Theta(n^3) > 0,379972 + \Theta(n^3)$ . En la tabla 2.3, ilustramos los valores obtenidos para  $\overline{cr}(n)$  con  $28 \leq n \leq 99$ .

## 2.5. Construcción de dibujos de $K_n$

Si bien no se ha encontrado una equivalencia, entre el problema del número de cruces rectilíneos y el de rectas medianas, no podemos descartar la existencia de alguna relación entre estos; aun más si en los casos conocidos, los buenos dibujos para el problema de las rectas medianas, también son buenos dibujos para el problema del número de cruces. Según lo anterior, un buen punto de partida para encontrar buenos dibujos con pocos cruces, podría ser buscar buenos dibujos con bastantes rectas medianas. En esta sección trabajaremos dos heurísticas para la construcción de dibujos de  $K_n$ ; la primera construcción fue tomada de [12] y en esta, el objetivo es construir conjuntos de puntos con muchas rectas medianas; la segunda construcción así como las imágenes que se muestran en esta, fueron tomadas de [2], en donde se generaliza la primera construcción adaptada para el problema del número de cruces rectilíneos. Esta última construcción, además de

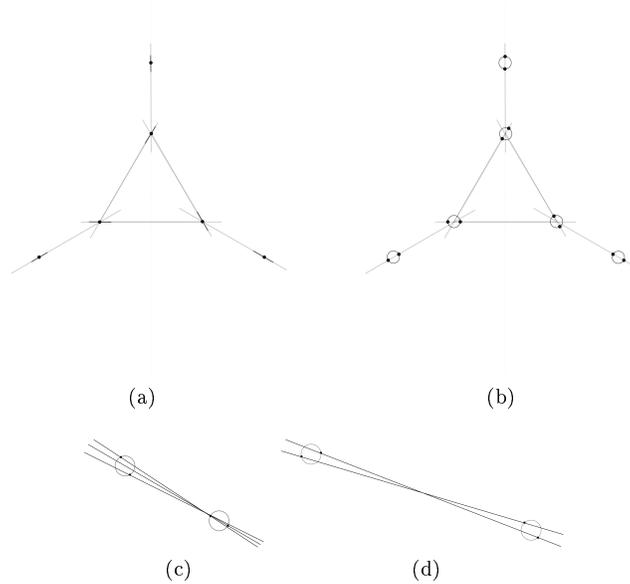


Figura 2.5.1: Construcción de  $K_{12}$  a partir de  $K_6$

los buenos conjuntos de puntos que pueda generar, también implica las mejores cotas conocidas el momento para el problema de los cuatro puntos de Sylvester.

### Construcción 1

**Definición 38.** Dado un conjunto  $P$ , la *gráfica de rectas medianas* de  $P$  denotada por  $GM(P)$ , es la gráfica resultante al identificar los puntos de  $P$  como vértices, donde además dos vértices están relacionados, si al unir sus respectivos puntos por una recta esta resulta ser una recta mediana.

**Teorema 39.** Sean  $n$  par y  $P$  un dibujo de  $K_n$  con  $k$  rectas medianas, tal que  $MG(P)$  es conexa y contiene un ciclo; entonces existe un dibujo  $P'$  de  $K_{2n}$  para el cual  $GM(P')$  conexa, contiene un ciclo y tiene al menos  $2k + n$  rectas medianas.

*Demostración.* Como  $GM(P)$  es conexa y contiene un ciclo,  $P$  tiene al menos  $n$  rectas medianas. Lo primero que haremos, será asociarle una recta mediana diferente a cada punto de  $P$ , de forma que sobre cada punto incida su recta asociada.

Sea  $p_0, p_1, \dots, p_{t-1}$  un ciclo de en  $GM(P)$ . Iniciaremos por asociarle a cada  $p_i$  la recta mediana que pasa por  $p_i p_j$ , donde  $j$  es  $i + 1$  módulo  $t$ . Al ser  $GM(P)$  un gráfica conexa, mientras existan vértices a los cuales no se les ha asociado una recta mediana, existirá una arista  $pq$  en  $GM(P)$  tal que  $q$  tiene asociada

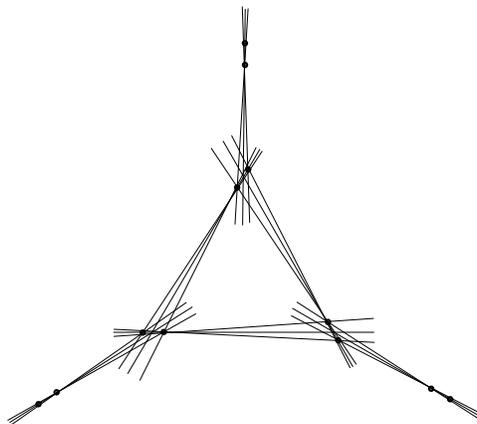


Figura 2.5.2: Dibujo de  $K_{12}$  según la construcción 1

una recta mediana mientras que  $p$  no; de esta forma, para continuar el proceso le asociaremos la recta mediana que pasa por  $p$  y  $q$ , al punto  $p$  (figura 2.5.1a).

Sea  $\epsilon$  suficientemente pequeño, tal que si los puntos se perturban una distancia no superior a  $\epsilon$ , estos siguen manteniendo el mismo tipo de orden que  $P$ . Para obtener  $P'$  reemplazamos cada punto  $p$  en  $P$  por dos nuevos puntos  $p_1$  y  $p_2$ , ubicados sobre la recta mediana asociada a  $p$ , y a distancia  $\epsilon$  de este (figura 2.5.1b).

Ahora contaremos las rectas medianas de  $P'$ , resultantes a partir de una recta mediana de  $P$ . Sean,  $E_1$  las rectas medianas en  $P$  que han sido asociadas a un punto, y  $E_2$  las que no. Dada una recta mediana  $l$  asociada al punto  $p$ , y que además pasa por  $q$ , las rectas  $p_1p_2$ ,  $p_2q_1$  y  $p_2q_2$  son rectas medianas de  $P'$ . Dada una recta mediana  $l$  en  $E_2$  esta debe pasar por dos puntos  $p$  y  $q$ , como  $l$  no está en  $E_1$ ,  $p_1$  y  $q_1$  están en el lado opuesto con respecto a  $l$  de donde se encuentran  $p_2$  y  $q_2$ ; además como  $\epsilon$  es suficientemente pequeño,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  y  $q_2$  forman un cuadrilátero convexo,  $p_1q_2$  y  $p_2q_1$  son rectas medianas en  $P'$ . Según lo anterior  $h(P') \geq 3E_1 + 2E_2 = 3n + 2(k - n) = n + 2k$  (figura 2.5.1).

Teniendo en cuenta que, si al contraer cualquier arista, la gráfica la resultante es conexa y contiene un ciclo, entonces la gráfica original también es conexa y contiene un ciclo. Para concluir la prueba, es suficiente con notar que al contraer sucesivamente aristas  $p_1p_2$  de  $MG(P')$  obtenemos  $MG(P)$ .  $\square$

## Construcción 2

En la construcción anterior, tomábamos un dibujo  $P$  de  $K_n$ , y reemplazábamos cada punto de  $p$  en  $P$  por un conjunto de dos puntos tal que, la recta definida por estos era mediana. En la siguiente construcción mantendremos esta idea, con la diferencia que reemplazaremos cada punto  $p$  de  $P$ , por un conjunto de puntos con tamaño y tipo de orden variable.

En esta construcción tomaremos como entrada un conjunto de puntos  $P =$

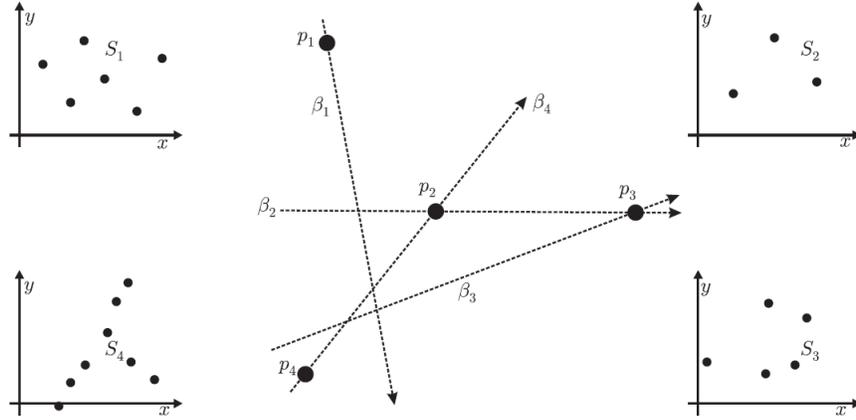


Figura 2.5.3: Entrada para la construcción 2

$\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  en posición general, una familia  $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  de conjuntos de puntos en posición general que no comparten la misma coordenada  $x$ , llamados **bloques**, y un conjunto de líneas pre-medianas definidas de la siguiente forma (figura 2.5.3).

Sea  $s_i$  la cardinalidad de  $S_i$  para cada  $i$  entre 1 y  $m$ . Sean  $I = \{i : s_i > 1\}$  y  $\beta_i$  para  $i \in I$  una línea dirigida que contiene a  $p_i$ . Si  $\beta_i$  contiene un punto  $p_j$  de  $P$  diferente de  $p_i$ , diremos que  $p_i$  y  $\beta_i$  son **divisores** y que  $\beta_i$  **divide** a  $p_j$  y lo denotamos por  $j = \sigma(i)$ , en otro caso diremos que  $p_i$  y  $\beta_i$  son simples. Por cada  $i$  en  $I$  denotamos por  $\mathcal{L}(i)$  (respectivamente por  $\mathcal{R}(i)$ ) al conjunto de índices  $k$ , tal que  $p_k$  se encuentra a la izquierda (respectivamente a la derecha) de  $\beta_i$ . Diremos que el  $\mathcal{B} = \{\beta_i\}$  es un **conjunto de líneas pre-medianas**, si satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si  $i$  es diferente de  $j$ , entonces  $\beta_i$  es diferente de  $\beta_j$  y de  $-\beta_j$ , la recta dirigida en el sentido inverso de  $\beta_j$
2. Si  $\beta_i$  es simple, entonces

$$0 \leq \sum_{k \in \mathcal{L}(i)} s(k) - \sum_{k \in \mathcal{R}(i)} s(k) \leq 1$$

3. Si  $\beta_i$  es divisor, entonces  $\beta_i$  es dirigido de  $p_i$  hacia  $p_{\sigma(i)}$  y

$$\left| \sum_{k \in \mathcal{L}(i)} s(k) - \sum_{k \in \mathcal{R}(i)} s(k) \right| \leq s_{\sigma(i)} - 1$$

Al terminar las cuatro etapas de esta construcción, habremos reemplazado cada punto  $p_i$  de  $P$ , por una copia afín  $C_i$  de  $S_i$ , obteniendo como resultado, un

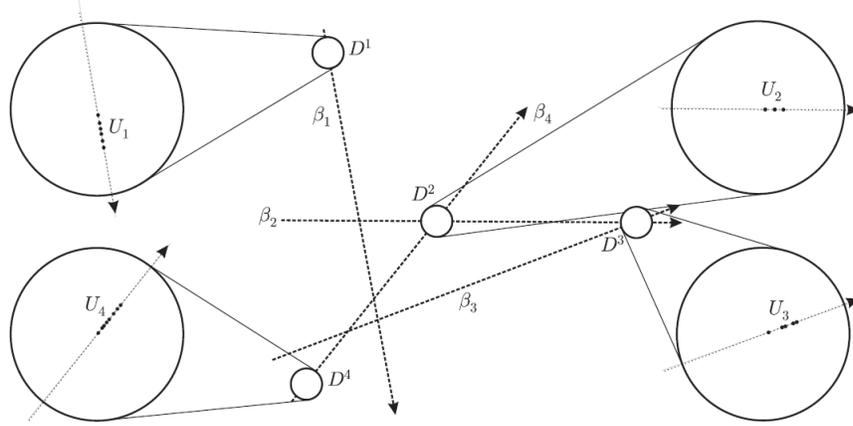


Figura 2.5.4: Ejemplo etapa 2

conjunto de puntos  $C = \bigcup_{i=1}^m C_i$  que hereda el tipo de orden de  $P$ , esto es que dados los puntos  $q_i \in C_i$ ,  $q_j \in C_j$  y  $q_k \in C_k$ ,  $q_i q_j q_k$  tiene el mismo tipo de orden que  $p_i p_j p_k$ ; además para cada  $i$  entre 1 y  $m$ , existe una recta dirigida  $l$  que deja exactamente  $\lceil |C/C_i|/2 \rceil$  y  $\lfloor |C/C_i|/2 \rfloor$  puntos a la izquierda y a la derecha de  $l$  respectivamente, y si una recta  $l'$  pasa por dos puntos de  $C_i$  esta debe dividir a  $C/C_i$  como  $l$  lo hace.

**Etapa 1** Crear pequeños discos alrededor de cada  $p_i$ .

Por cada  $i = 1, \dots, m$  sea  $D^i$  un disco de radio  $r_i$  y centro en  $p_i$ , con los  $r_i$  lo suficientemente pequeños para que dados  $q_i \in C_i$ ,  $q_j \in C_j$  y  $q_k \in C_k$  el tipo de orden de  $q_i q_j q_k$  sea el mismo que el de  $p_i p_j p_k$ .

**Etapa 2** Reemplazar cada  $p_i$  por un conjunto  $U_i$  contenido en  $D^i \cap \beta_i$ .

Para cada  $S_i$  proyectaremos sus puntos sobre el eje  $x$ , reducimos esta configuración hasta que los puntos estén en un disco de radio  $r_i/2$ , los giramos hasta darles la orientación de  $\beta_i$ , y ubicamos esta configuración de puntos en  $D^i \cap \beta_i$  como reemplazo de  $p_i$  (figura 2.5.4).

**Etapa 3** Mover  $U_i$

Por la tercera condición de conjunto de líneas pre-medianas, tenemos que la diferencia entre la cantidad de puntos de  $C/C_i$ , arriba y abajo de  $\beta_i$  luego de haber reemplazado los  $p_i$  por  $U_i$ , es a los sumo  $s_{\sigma(i)} - 1$ , y los puntos que hacen esta diferencia son los de  $U_{\sigma(i)}$ ; para solucionar esto nuestra principal herramienta es girar los  $\beta_i$  junto con sus nuevos puntos, hasta que esta divida a  $C/C_i$  en dos conjuntos de igual tamaño, tal como muestra la figura 2.5.5.

Podríamos ajustar todas las  $\beta_i$ , de ser por la posibilidad de que estas formen algún ciclo entre si; si este es el caso al seguir el proceso podríamos que-

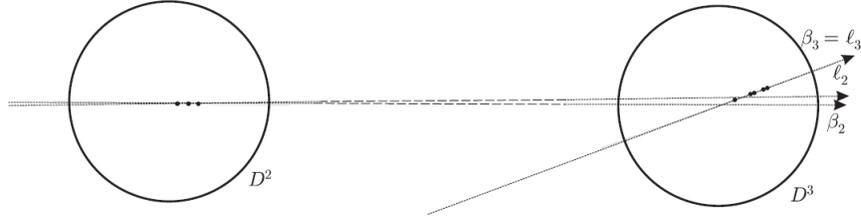


Figura 2.5.5: Girando a  $\beta_2$

darnos repitiendo este varias veces. Análogo a la primera construcción, consideremos una gráfica dirigida  $G$ , para la cual el conjunto de vértices es  $\{p_i : i \in I\}$  y la arista dirigida de  $p_i$  a  $p_j$  esta en  $G$ , si y solo si  $\beta_i$  divide a  $p_j$ . Sea  $H$  una componente conexa de  $G$ , como todos los vértices de  $H$  tienen grado de salida 1, y esta es conexa, entonces  $H$  tiene exactamente un ciclo. Sea  $p_{\alpha(1)}p_{\alpha(2)} \dots p_{\alpha(t)}$  el ciclo en  $H$ , procedemos a girar las  $\beta_i$  hasta convertirlos en rectas medianas, en sentido inverso al ciclo e iniciando con  $\beta_{\alpha(t)}$ , de esta forma al girar a  $\beta_{\alpha(1)}$  la única arista del ciclo que puede no corresponder a una recta mediana es  $\beta_{\alpha(t)}$ , pero mediante una traslación de  $U_{\alpha(1)}$  a través de la nueva línea  $\beta_{\alpha(1)}$ , podemos convertir a  $\beta_{\alpha(t)}$  en una recta mediana, sin quitarle esta propiedad a las demás rectas concernientes a aristas del ciclo; para terminar de convertir todas las rectas relacionadas a cada arista de  $H$ , es suficiente con girar consecutivamente una recta  $\beta_k$  tal que esta no ha sido girada pero  $\beta_{\sigma(k)}$  si.

**Etapa 4** Dar forma a  $U_i$  de  $S_i$

Dado  $U_i$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que si movemos algunos puntos de  $U_i$  en forma perpendicular a  $\beta_i$  una distancia no superior a  $\epsilon$ , toda recta que pasa por dos puntos de  $U_i$ , separa los puntos que no están en  $U_i$  tal como  $\beta_i$  lo hace. De esta forma podemos mover los puntos de  $U_1$  hasta convertir este en una copia afín de  $S_1$ , una vez hecho esto seguimos haciéndolo consecutivamente mediante un proceso análogo, convirtiendo cada  $U_i$  en una copia afín de  $S_i$ .

**Calculo del número de cruces**

Para contar el número de cruces rectilíneos en  $C = \bigcup C_i$ , contaremos el número de cuadriláteros convexos, según los siguientes cinco casos para la distribución de puntos sobre los  $C_i$ 's.

1. Todos los puntos están en diferentes bloques.

Como la construcción 2 mantiene el tipo de orden, el número de cuadriláteros convexos para este primer caso esta dado por

$$\sum_{i < j < k < l} s_i s_j s_k s_l$$

$p_i, p_j, p_k, p_l$  forman un cuadrilátero convexo.

## 2. Los puntos están en tres bloques

En este caso hay dos puntos  $q_1$  y  $q_2$  en un bloque  $C_i$ , y los otros dos puntos  $r_j$  y  $r_k$  en  $C_j$  y  $C_k$  respectivamente. Al considerar todos los segmentos de recta, resultantes al unir los puntos  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $r_j$  y  $r_k$ , los segmentos  $q_1q_2$  y  $r_jr_k$  no interceptan otro segmento de recta, pues de ser así el tipo de orden de  $r_jq_1r_k$  sería diferente de  $r_jq_2r_k$ , además el segmento de recta  $r_jr_k$  siempre esta en la envoltura convexa de  $q_1q_2r_jr_k$ ; de esta forma,  $q_1q_2r_jr_k$  forman un cuadrilátero convexo si y solo si el segmento  $q_1q_2$  esta en la envoltura convexa, y esto sucede exactamente cuando  $r_j$  y  $r_k$  están en el mismo semiplano definido por  $\beta_i$ . De esta forma considerando  $L_i$  y  $R_i$ , como los puntos de  $C_{\sigma(i)}$  que se encuentran a la izquierda y derecha de  $\beta_i$  respectivamente, tenemos que la cantidad de cruces para el segundo caso esta dado por

$$\sum_{i=1}^m \binom{s_i}{2} \left( \sum_{\substack{j, k \in \mathcal{L}(i) \\ j < k}} s_j s_k + \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} s_j |L_i| + \sum_{\substack{j, k \in \mathcal{R}(i) \\ j < k}} s_j s_k + \sum_{j \in \mathcal{R}(i)} s_j |R_i| \right)$$

Donde  $L_i = \lceil (n - s_i)/2 \rceil - \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} s_j$ , pues al dividir  $\beta_i$  a  $C/C_i$ , tenemos que  $\lceil (n - s_i)/2 \rceil = \sum_{j \in \mathcal{L}(i)} s_j + L_i$ . Análogamente  $R_i = \lfloor (n - s_i)/2 \rfloor - \sum_{j \in \mathcal{R}(i)} s_j$ .

## 3. Los puntos están en dos bloques, dos puntos en cada uno.

Para este caso tenemos dos puntos  $r_1$  y  $r_2$  en un bloque  $C_i$ , y otros dos puntos  $q_1$  y  $q_2$  en  $C_j$ . Con un razonamiento similar al anterior, tenemos que  $r_1r_2q_1q_2$  forman un cuadrilátero convexo, si  $r_1$  esta en el mismo semiplano definido por  $\beta_j$  que  $r_2$ , y  $q_1$  está en el mismo semiplano definido por  $\beta_i$  que  $q_2$ . De esta forma, variando primero los valores de  $r_1$  y  $r_2$ , y luego los de  $q_1$  y  $q_2$  tenemos en total

$$\binom{s_i}{2} \left( \sum_{j \neq \{i, \sigma(i)\}} \binom{s_j}{2} + \binom{|L_i|}{2} + \binom{|R_i|}{2} \right) \sum_{j: i=\sigma(j)} \binom{s_j}{2} |L_j| |R_j|$$

pero contaríamos cada cruce en dos veces, así el número total de intersecciones esta dado por

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \binom{s_i}{2} \left( \sum_{j \neq \{i, \sigma(i)\}} \binom{s_j}{2} + \binom{|L_i|}{2} + \binom{|R_i|}{2} \right) - \sum_{j: i=\sigma(j)} \binom{s_j}{2} |L_j| |R_j| \right)$$

## 4. Los puntos están en dos bloques, tres en uno y uno en otro.

Supongamos que  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  están en el bloque  $C_i$ , y  $r$  esta en el bloque  $C_j$ . Los puntos  $q_1$   $q_2$  y  $q_3$  forman un ángulo casi llano, de esta forma diremos que es una tripleta cóncava, si el mayor ángulo que forman abre hacia la izquierda de  $\beta_i$ , en el otro caso diremos que es convexo. Denotamos

por  $\sqcup(S_i)$  y  $\sqcap(S_i)$  la cantidad de tripletas cóncavas y convexas en  $S_i$  respectivamente. Es claro que  $r$  forma un cuadrilátero convexo con una tripleta cóncava (convexa) contenida en  $S_i$ , si y solo si  $r$  esta a la izquierda (derecha) de  $\beta_i$ . Así el número de cuadriláteros convexos para el caso 4 esta dado por

$$\sum_{i=1}^m (\sqcup(S_i) \lceil (n - s_i)/2 \rceil + \sqcap(S_i) \lfloor (n - s_i)/2 \rfloor)$$

5. Todos los puntos están en un mismo bloque.

Ya que cada  $C_i$  mantiene el tipo de orden de  $S_i$  es claro que

$$\sum_{i=1}^m \square(C_i) = \sum_{i=1}^m \square(S_i)$$

Tomando la primera construcción como un caso particular de la segunda, obtenemos el método expuesto en [3] para obtener un nuevo dibujo  $P'$  con  $2n$  puntos a partir de un dibujo  $P$  de  $K_n$ , que satisface las condiciones del teorema 39. En esta construcción, como es de esperarse, al tener un gran número de rectas medianas, tiene bajo número de cruces; más precisamente, al contar la cantidad de cruces en  $P'$  según los casos 1, 2 y 3 de la construcción 2 obtenemos

$$\square(P') = 16\square(P) + (m/2)(2m^2 - 7m + 5)$$

Estas restricciones sobre la paridad de  $n$  y la gráfica de rectas medianas, las lograron evitar en [1] con la existencia de un buen conjunto inicial de líneas premedianas, conjunto con el cual, apartir de la primera interacción se obtiene un dibujo que satisface las condiciones del teorema 39, e iterando este sucesivamente se obtiene el teorema 40; por medio del cual, se puede inducir una cota para el problema de los cuatro puntos de Sylvester apartir de un buen dibujo  $P$ .

**Teorema 40.** [1] Si  $P$  es conjunto de  $m$  puntos en posición general, con  $m$  impar entonces

$$\overline{cr}(n) \leq \frac{24\overline{cr}(P) + 3m^3 - 7m^2 + (30/7)m}{m^4} \binom{n}{4} + \Theta(n^3)$$

## Capítulo 3

# Algoritmos y observaciones.

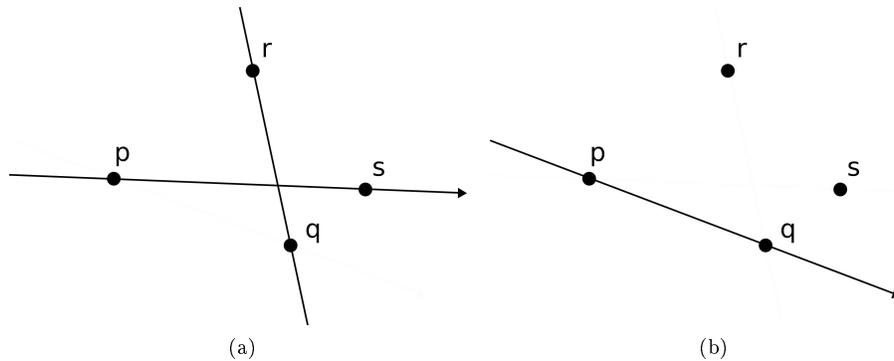
### 3.1. Número de cruces rectilíneos en $O(n^2 \log(n))$ .

En la sección 2.5 del capítulo anterior, se presentó un método para obtener dibujos rectilíneos de  $K_n$ , a partir de un dibujo base. Esta construcción está basada en que los dibujos de  $K_n$  con una gran cantidad de rectas medianas no tienen muchos cuadriláteros convexos. Sin embargo, dicha construcción no garantiza un valor óptimo para el número de cruces rectilíneos; es más, al perturbar un poco algunos puntos y calcular nuevamente la cantidad de intersecciones, podría ser el caso que estos hubieran disminuido un poco. Si tenemos la intención de mermar en número de cruces rectilíneos, una posibilidad es perturbar los puntos de forma aleatoria y en caso de que este número disminuya o se quede igual, quedarnos con el nuevo conjunto. En estos casos, una herramienta básica es el poder calcular rápidamente la cantidad de cruces de aristas. Esta sección la dedicaremos al algoritmo presentado por Ruy Fabila y Jorge López en [13], para calcular el número de cruces que aparecen al dibujar rectilíneamente a  $K_n$  sobre un conjunto de puntos dado.

Retomando la demostración del teorema 24, podemos inferir que  $\square(P) = 3\binom{n}{4} - \frac{1}{2}\phi$ ; donde  $\phi$  representa la cantidad de cuádruplas  $(u, v, w, z)$ , tal que la recta dirigida de  $u$  a  $v$ , intercepta a la recta que pasa por  $w$  y  $z$ . Sea  $(u, v, w, z)$  una cuádrupla a contar en  $\phi$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $z$  se encuentra a la derecha de la recta dirigida de  $u$  a  $v$ . Así  $v$  y  $w$  se encuentran a la izquierda de la recta dirigida de  $u$  a  $z$ , y al ordenar los puntos alrededor de  $u$  en sentido anti horario, tenemos el orden  $z v$  y  $w$ . Recíprocamente, si  $r$  y  $s$  se encuentran a la izquierda de una recta dirigida de  $p$  a  $q$ , tal que al ordenar por ángulo los puntos  $r, s$  y  $q$ , al rededor de  $p$  en sentido anti horario, obtenemos el orden  $q, s$  y  $r$ , entonces  $(p, s, q, r)$  es una cuádrupla a contar en  $\phi$  (ver figura 3.1.1).

Según lo anterior, podemos expresar a  $\phi$  como

$$\phi = \sum_{p \in P} \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{p,q}(P)}{2} \quad (3.1.1)$$

Figura 3.1.1: Cuádruplas a contar en  $\phi$ 

donde  $n_{p,q}(P)$  representa la cantidad de puntos en  $P$ , a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $q$ . Cuando se sobre entienda el conjunto de puntos en el que estamos trabajando denotaremos a  $n_{p,q}(P)$  como  $n_{p,q}$ . Así por el teorema 24,  $\square(P)$  queda determinado por los valores de  $n_{p,q}(P)$ .

El algoritmo presentado en [13], está basado en calcular para cada  $p \in P$ , los  $n_{p,q}$  con  $q \neq p$  en tiempo  $O(n \log(n))$ ; obteniendo así  $\square(P)$  en tiempo  $O(n^2 \log(n))$ . La forma de calcular los  $n_{p,q}$  tiene sus fundamentos en lo siguiente:

"En tiempo  $O(n \log n)$ , podemos ordenar los puntos en  $P \setminus \{p\}$  por ángulo alrededor de  $p$ . Luego, al girar una línea dirigida alrededor de  $p$ , podemos calcular en tiempo lineal los  $n_{p,q}$  con  $p$  distinto de  $q$ . Actualizando los puntos que van entrando y saliendo del semiplano izquierdo de  $l$  al ser girada."

### 3.2. Número de cruces rectilíneos en $O(n \log(n))$ amortizado.

Si solamente un punto cambió de lugar, uno pensaría que se podría recalcular el número de cruce en menos tiempo que  $O(n^2 \log n)$ . No sabemos por el momento si en efecto esto es posible. En cambio presentaremos un algoritmo que dado un punto  $p$  y  $m$  candidatos para su nueva ubicación, calcula el número de cruce para cada uno de ellos en tiempo total  $O((n+m)^2 \log(n+m))$ . De esta forma para el caso " $m = n$ ", tendremos un algoritmo de tiempo amortizado  $O(n \log n)$  por candidato.

Sean  $P$  un conjunto de puntos en posición general,  $p_0$  un punto de  $P$ ,  $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  una lista de  $m$  candidatos para mover a  $p_0$ ,  $p_i \in \mathcal{C}$  y  $P_i^*$  el

resultante al cambiar a  $p_0$  por  $p_i$  en  $P$ . De la ecuación 3.1.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \phi(P_i^*) &= \sum_{q \in P_i^* \ q \neq p^*} \binom{n_{p_i, q}(P_i^*)}{2} \\ &+ \sum_{p \in P_i^* \ p \neq p_i} \sum_{q \in P_i^* \ q \neq p, p_i} \binom{n_{p, q}(P_i^*)}{2} \\ &+ \sum_{q \in P_i^* \ q \neq p_i} \binom{n_{q, p_i}(P_i^*)}{2} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

como, el primer término de la ecuación 3.2.1 lo podemos calcular en  $O(n \log(n))$ , igual que en la sección anterior, y además por el lema 41 el tercer término es igual al primero, entonces podemos encontrar, el primer y tercer término de la ecuación 3.2.1 para los valores de  $\mathcal{C}$ , en tiempo  $O(mn \log(n))$ .

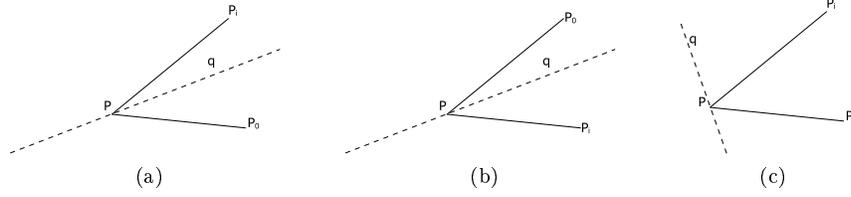
**Lema 41.** *Sea  $P$  un conjunto de puntos en posición general y  $p \in P$ , entonces*

$$\sum_{q \in P \ q \neq p} \binom{n_{p, q}(P)}{2} = \sum_{q \in P \ q \neq p} \binom{n_{q, p}(P)}{2}$$

*Demostración.* Sean  $v$  y  $w$  en  $P$  diferentes de  $p$ . Considerando el ángulo  $vpw$  en sentido anti horario; si éste es menor a  $180^\circ$ ,  $w$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $w$ ; en caso contrario,  $v$  está a la izquierda de la recta dirigida de  $p$  a  $w$ . De lo anterior tenemos que

$$\sum_{q \in P \ q \neq p} n_{p, q}(P) = \binom{n-1}{2} \quad (3.2.2)$$

luego haciendo las cuentas obtenemos


 Figura 3.2.1: Casos para la diferencia entre  $n_{p,q}(P_i^*)$  y  $n_{p,q}(P)$ 

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{q,p}}{2} &= \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n-2-n_{p,q}}{2} \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \frac{(-1)(n-2-n_{p,q})(-1)(n-2-n_{p,q}-1)}{2} \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \frac{(n_{p,q} + (n-2))(n_{p,q} - 1 + (-n+4))}{2} \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \frac{n_{p,q}(n_{p,q}-1)}{2} + \sum_{q \in P, q \neq p} \frac{(-n+2)(n_{p,q}-n+3) + n_{p,q}(-n+4)}{2} \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{p,q}}{2} + \sum_{q \in P, q \neq p} \frac{n_{p,q}(-n+2-n+4) + (-n+2)(-n+3)}{2} \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{p,q}}{2} + (-n+3) \sum_{q \in P, q \neq p} [n_{p,q} - (n-2)/2] \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{p,q}}{2} + (-n+3) \left[ \sum_{q \in P, q \neq p} n_{p,q} - (n-2)(n-1)/2 \right] \\
 &= \sum_{q \in P, q \neq p} \binom{n_{p,q}}{2}
 \end{aligned}$$

□

Sea  $p \in P_i^*$  con  $p \neq p_i$ . De forma análoga a la sección anterior podemos encontrar  $\sum_{q \in P, q \neq p, p_0} \binom{n_{p,q}(P)}{2}$  en tiempo  $O(n \log(n))$ , así solo resta encontrar

$$\left\{ \sum_{q \in P^*, q \neq p, p_i} \binom{n_{p,q}(P_i^*)}{2} - \sum_{q \in P, q \neq p, p_0} \binom{n_{p,q}(P)}{2} \right\}_{i=1}^m$$

en tiempo  $(n+m) \log(n+m)$ . Dado un punto  $q \in P_i^*$  diferente de  $p_i$  tenemos tres casos para éste (Figura 3.2.1)

1. Si el ángulo  $p_0 p p_i$  es agudo en sentido anti horario, y  $q$  está en el interior de este ángulo; entonces  $n_{p,q}(P_i^*) = n_{p,q}(P) + 1$  y por tanto  $\binom{n_{p,q}(P_i^*)}{2} = \binom{n_{p,q}(P)}{2} + n_{p,q}$ .

Número de puntos y candidatos	Algoritmo amortizado	Algoritmo no amortizado	Relación entre tiempos
50	0.07	0.6	$0,6 = 0,07 \times (50/5,6) \times 1,041$
100	0.3	5.6	$5,6 = 0,30 \times (100/5,6) \times 0,956$
150	0.69	18.08	$18,08 = 0,69 \times (150/5,6) \times 1,022$
200	1.25	44.21	$44,21 = 1,25 \times (200/5,6) \times 1,009$
250	1.97	87.44	$87,44 = 1,97 \times (250/5,6) \times 1,005$
300	2.89	154.53	$154,53 = 2,89 \times (300/5,6) \times 1,001$
350	4.01	248.71	$248,71 = 4,01 \times (350/5,6) \times 1,007$
400	5.29	386.45	$386,45 = 5,29 \times (400/5,6) \times 0,977$

Cuadro 3.1: Tiempos algoritmo amortizado y no amortizado

- Si el ángulo  $p_i p p_0$  es agudo en sentido anti horario, y  $q$  está en el interior de este ángulo; entonces  $n_{p,q}(P_i^*) = n_{p,q}(P) - 1$  y por tanto  $\binom{n_{p,q}(P_i^*)}{2} = \binom{n_{p,q}(P)}{2} - (n_{p,q} - 1)$ .
- Si no se cumplen los casos anteriores, entonces  $p_0$  y  $p_i$  están en el mismo lado con respecto a la recta que pasa por  $p$  y  $q$ , por tanto  $n_{p,q}(P^*) = n_{p,q}(P)$  y por tanto  $\binom{n_{p,q}(P_i^*)}{2} = \binom{n_{p,q}(P)}{2}$ .

Ordenamos por ángulo los puntos en  $P \cup \mathcal{C}$  diferentes de  $p$ . Giramos una recta  $l$  en sentido antihorario alrededor de  $p$ , actualizando la suma de los  $n_{p,q}(p)$  cada que encontremos un punto  $q \in P$ . Al encontrar un punto de  $\mathcal{C}$ , podemos saber cuanto da la suma de los  $n_{p,q}(P)$ , tal que  $q$  corresponde al caso 1. Al girar  $l$  en sentido horario, podemos encontrar la suma de los  $-n_{p,q} - 1$  tal que  $q$  corresponde al caso 2, y así determinar completamente

$$\sum_{q \in P^*} \left[ \binom{n_{p,q}(P_i^*)}{2} - \binom{n_{p,q}(P)}{2} \right]$$

En la tabla 3.1 se ilustran los tiempos de ejecución de los algoritmos de las secciones 3.1 y 3.2, junto a una relación entre éstos.

### 3.3. Cotas superiores para el número de cruces rectilíneos

El trabajo de encontrar cotas superiores, para valores particulares de  $n$  es más manual que el de las cotas inferiores. El método por excelencia ha sido el de encontrar buenos dibujos para valores particulares de  $n$ . Incluso la cota superior para su valor asintótico, depende de un buen dibujo inicial. Uno de los grandes avances en esta tarea se logró al generar conjuntos de puntos más grandes, a partir de conjuntos base con buen número de cruces.

$n$	$\overline{cr}(n) \leq$						
28	7234	46	59464	64	234470	82	649983
29	8423	47	65061	65	249988	83	683096
30	9726	48	71010	66	266188	84	717384
31	11213	49	77430	67	283286	85	753079
32	12836	50	84226	68	301098	86	790038
33	14634	51	91446	69	319737	87	828233
34	16620	52	99170	70	339297	88	868023
35	18808	53	107355	71	359695	89	909128
36	21175	54	115994	72	380978	90	951526
37	23803	55	125209	73	403234	91	995678
38	26635	56	134930	74	426466	92	1041165
39	29715	57	145178	75	450550	93	1088217
40	33071	58	156058	76	475849	94	1136919
41	36700	59	167514	77	502079	95	1187263
42	40590	60	179541	78	529350	96	1239003
43	44828	61	192293	79	557849	97	1292802
44	49374	62	205666	80	587367	98	1348072
45	54213	63	219683	81	618048	99	1405132

Cuadro 3.2: Cotas tomadas de [5]

En la tabla 3.2 presentamos una lista inicial para las cotas superiores de  $\overline{cr}(n)$ , estas fueron obtenidas de [5].

Como mencionamos al principio de esta sección, es de esperarse que los dibujos obtenidos por la construcción 2 no sean óptimos. Es más, al mover los puntos de las configuraciones obtenidas en [5], donde cada punto se toma y se mueve de forma aleatoria, mediante el algoritmo presentado en la sección 3.1; Ruy Fabila y Jorge López lograron mejorar casi todos los dibujos de [5], obteniendo nuevas cotas superiores. Estas cotas se muestran en la tabla 3.3.

Si ha dado buenos resultados el algoritmo presentado en la sección 3.1, es de esperarse para grandes valores de  $n$ , una implementación del algoritmo de la sección 3.2 ofrezca resultados más rápidamente; una muestra de estos es que al implementar éste en el lenguaje Python, pueda competir en cuanto a velocidad, con una implementación en lenguaje C del algoritmo de la sección 3.1, adquiriendo ventaja sobre éste para valores grandes de  $n$ .

En la tabla siguiente presentamos nuevas cotas superiores para algunos valores de  $n$  menores que 100, obtenidas por la implementación del algoritmo amortizado, a partir de las configuraciones obtenidas en [5].

$n$	$\overline{cr}(n) \leq$						
46	59463	64	234464	77	502021	90	951418
47	65059	65	249962	78	529291	91	995486
49	77428	66	266151	79	557745	92	1040954
50	84223	67	283238	80	587289	93	1087981
52	99169	68	301057	81	617958	94	1136655
53	107347	69	319691	82	649900	95	1187165
54	115979	70	339254	83	682986	96	1238918
56	134917	71	359645	84	717280	97	1292796
57	145174	72	380926	85	753013	98	1348070
58	156049	73	403180	86	789960	99	1405096
59	167506	74	426419	87	828165		
61	192289	75	450492	88	867911		
63	219659	76	475793	89	908972		

Cuadro 3.3: Cotas tomadas de [13]

Cotas superiores para $\overline{cr}(n)$ con $n \leq 100$							
$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$
70	339252	80	587284	88	867887	96	1238898
71	359645	81	617952	89	908946	97	1292664
72	380934	82	649861	90	951383	98	1348066
74	426411	83	682982	91	995484	99	1405050
76	475778	84	717278	92	1040952	100	1463967
77	502021	85	753011	93	1087919		
78	529284	86	789919	94	1136592		
79	557743	87	828129	95	1187161		

En la tabla siguiente presentamos cotas superiores para valores mayores que 100 obtenidas a partir de conjuntos aleatorios de puntos.

Cotas superiores para $\overline{cr}(n)$ con $n > 100$							
$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$
101	1524363	164	10932453	227	40690202	290	109189474
102	1587379	165	11204313	228	41393002	291	110783682
103	1651701	166	11488239	229	42148691	292	112325073
104	1718190	167	11761915	230	42904959	293	113886359
105	1786348	168	12056361	231	43646897	294	115421397
106	1857476	169	12344936	232	44457791	295	117105135
107	1932014	170	12646681	233	45201980	296	118612533
108	2003474	171	12949212	234	45994665	297	120241250
109	2080837	172	13256603	235	46819654	298	121858411
110	2159583	173	13572029	236	47591238	299	123555620
111	2240295	174	13897533	237	48429507	300	125240833

112	2324364	175	14221625	238	49255211	301	126913315
113	2409440	176	14548328	239	50108343	302	128727584
114	2498096	177	14889078	240	50929213	303	130419217
115	2588274	178	15229501	241	51792676	304	132119300
116	2681130	179	15585550	242	52662503	305	133814406
117	2777239	180	15939174	243	53548518	306	135660719
118	2874020	181	16292667	244	54448550	307	137470862
119	2974297	182	16661561	245	55372365	308	139258419
120	3076889	183	17032887	246	56254725	309	141096217
121	3182896	184	17415844	247	57219945	310	142930067
122	3291158	185	17809092	248	58155830	311	144778693
123	3402484	186	18194936	249	59086520	312	146651337
124	3516383	187	18604056	250	60045485	313	148567768
125	3634075	188	18994427	251	61057738	314	150520766
126	3752531	189	19408599	252	62011095	315	152416948
127	3875191	190	19827308	253	63022207	316	154357760
128	4001638	191	20258559	254	64024394	317	156383661
129	4129382	192	20683408	255	65047915	318	158345141
130	4261216	193	21126452	256	66071975	319	160420961
131	4396636	194	21567385	257	67125136	320	162432125
132	4533324	195	22024364	258	68178300	321	164522670
133	4675375	196	22490055	259	69234568	322	166543800
134	4819577	197	22946687	260	70338388	323	168628548
135	4968225	198	23424080	261	71496995	324	170754601
136	5118296	199	23907057	262	72563923	325	172903377
137	5272750	200	24398216	263	73662671	326	175012691
138	5430179	201	24900734	264	74796672	327	177179575
139	5591372	202	25401556	265	75958712	328	179414864
140	5757277	203	25904104	266	77088834	329	181618714
141	5925299	204	26423669	267	78303346	330	183844053
142	6095659	205	26951389	268	79474190	331	186073866
143	6275343	206	27496349	269	80672129	332	188330228
144	6456243	207	28031897	270	81895879	333	190852953
145	6637090	208	28584540	271	83180837	334	193101488
146	6825602	209	29146292	272	84391834	335	195651099
147	7017254	210	29698234	273	85662920	336	197871491
148	7213170	211	30280276	274	86875801	337	200041424
149	7413187	212	30868956	275	88174330	338	202693656
150	7615789	213	31456901	276	89464024	339	204957646
151	7821117	214	32065211	277	90970203	340	207549963
152	8034808	215	32670021	278	92119047	341	210042769
153	8251288	216	33298262	279	93467607	342	212361044
154	8471159	217	33926386	280	94791085	343	215124267

155	8702792	218	34544238	281	96219476	344	217561663
156	8927970	219	35200148	282	97553293	345	220242248
157	9160623	220	35845814	283	98983218	346	222633976
158	9420129	221	36511281	284	100392995	347	226033934
159	9641579	222	37189035	285	101833899	348	227910492
160	9890798	223	37872007	286	103289131	349	230670737
161	10143846	224	38569221	287	104750511	350	233058661
162	10401152	225	39240526	288	106226420		
163	10662682	226	39967932	289	107703076		

En la tabla siguiente presentamos algunas cotas para el valor asintótico de  $\overline{cr}(n)$  obtenidas a partir de la tabla anterior y el teorema 40.

Cotas para el valor asintótico de $\overline{cr}(n)$ dados por los valores de la tabla anterior							
$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$	$n$	$\overline{cr}(n) \leq$
101	0.38059281	190	0.38073718	249	0.38083014	315	0.38099058
142	0.38059549	130	0.38073751	226	0.38083387	318	0.38099208
108	0.38060821	164	0.38073833	275	0.38083455	311	0.38100181
151	0.38061585	220	0.38073973	222	0.38083541	332	0.38100359
210	0.38061960	259	0.38074137	202	0.38083639	291	0.38100574
120	0.38063778	156	0.38074176	175	0.38083705	300	0.38100633
111	0.38064243	246	0.38074296	268	0.38083827	292	0.38100640
228	0.38064330	231	0.38074508	252	0.38083908	239	0.38100829
159	0.38064406	198	0.38074767	298	0.38084136	313	0.38101307
167	0.38064443	173	0.38074794	191	0.38084637	327	0.38101557
105	0.38065211	280	0.38074865	260	0.38084652	293	0.38101965
154	0.38065564	146	0.38075040	168	0.38084726	326	0.38102318
163	0.38065851	137	0.38075119	289	0.38084797	273	0.38102465
225	0.38066044	215	0.38075242	244	0.38084818	331	0.38103539
113	0.38066456	207	0.38075255	206	0.38085089	251	0.38103742
122	0.38067239	112	0.38075281	284	0.38085146	323	0.38104053
103	0.38067390	140	0.38075293	278	0.38085417	310	0.38104420
121	0.38068037	136	0.38075362	257	0.38085434	322	0.38105524
157	0.38068295	147	0.38075480	223	0.38085719	308	0.38105630
183	0.38068311	184	0.38075521	180	0.38085862	304	0.38105711
119	0.38068366	134	0.38075748	270	0.38085901	337	0.38107072
181	0.38068676	114	0.38075766	144	0.38086097	317	0.38107109
188	0.38068707	212	0.38076221	216	0.38086752	324	0.38107338
126	0.38068747	199	0.38076768	227	0.38086846	306	0.38107608
152	0.38068885	282	0.38076779	196	0.38086869	309	0.38107901
160	0.38068944	133	0.38077143	234	0.38086883	330	0.38107996
162	0.38068988	290	0.38077184	254	0.38086891	235	0.38108056
153	0.38069263	148	0.38077197	283	0.38087604	320	0.38108440

104	0.38069461	221	0.38077257	255	0.38087619	329	0.38109280
218	0.38069472	186	0.38077370	230	0.38087724	314	0.38109471
118	0.38069661	208	0.38077452	279	0.38087927	232	0.38110595
132	0.38069791	195	0.38077583	305	0.38088130	271	0.38110763
139	0.38069846	274	0.38077587	217	0.38088276	328	0.38110824
123	0.38069867	171	0.38077664	265	0.38088375	325	0.38111180
197	0.38069924	128	0.38078661	296	0.38088550	307	0.38112052
161	0.38069959	242	0.38078916	285	0.38088569	319	0.38113593
127	0.38070118	149	0.38079023	174	0.38088577	261	0.38116627
102	0.38070126	240	0.38079033	201	0.38088587	321	0.38117001
124	0.38070146	193	0.38079039	179	0.38089413	107	0.38117128
145	0.38070182	236	0.38079197	294	0.38089638	303	0.38117394
211	0.38070242	106	0.38079328	288	0.38090550	295	0.38119619
110	0.38070325	131	0.38079457	185	0.38090584	339	0.38124612
203	0.38070554	276	0.38079629	297	0.38090652	350	0.38125293
194	0.38070650	177	0.38079740	287	0.38091217	342	0.38125970
204	0.38070896	125	0.38079830	238	0.38091229	302	0.38126845
141	0.38071269	200	0.38079877	253	0.38091552	334	0.38132053
176	0.38071321	214	0.38080221	286	0.38091564	346	0.38143136
213	0.38071329	229	0.38080260	267	0.38092062	333	0.38145192
169	0.38071348	143	0.38080570	166	0.38092430	336	0.38146196
138	0.38071606	241	0.38080579	224	0.38092528	158	0.38148502
129	0.38071718	250	0.38080773	155	0.38092668	340	0.38151358
205	0.38071749	209	0.38080859	237	0.38094095	348	0.38151983
192	0.38071784	243	0.38080899	262	0.38094427	344	0.38153394
165	0.38072015	170	0.38081173	316	0.38095155	338	0.38153620
109	0.38072524	264	0.38081734	301	0.38095677	341	0.38155950
115	0.38072544	219	0.38081785	248	0.38095895	277	0.38158335
182	0.38072577	256	0.38081812	272	0.38096425	343	0.38170013
172	0.38072725	269	0.38082076	299	0.38096819	349	0.38170459
116	0.38072801	258	0.38082238	281	0.38096891	335	0.38172592
178	0.38073059	263	0.38082397	245	0.38097023	345	0.38174574
266	0.38073201	135	0.38082580	312	0.38097525	347	0.38275579
189	0.38073261	233	0.38082930	187	0.38097740		
150	0.38073497	117	0.38083003	247	0.38098414		

Un buen camino para continuar el trabajo, es bajar el tiempo requerido para testar nuevas configuraciones de puntos. Esto se podría lograr, al implementar el algoritmo de la sección 3.2 en un lenguaje más rápido como C; otra alternativa es reducir el tiempo de ejecución, posiblemente a tiempo lineal amortizado; o una tarea quizás más difícil, es encontrar una versión dinámica de este algoritmo con tiempo de ejecución  $O(n \log(n))$ . Otros posibles trabajos son, estudiar los dibujos encontrados, buscando patrones que permitan identificar las regiones más prometedoras para mover los puntos; o encontrar buenos dibujos para el

problema de las rectas medianas, apartir de los dibujos encontrados para el número de cruces rectilíneos.

# Bibliografía

- [1] Bernardo M. Ábrego, Mario Cetina, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leañós, and Gelasio Salazar. 3-symmetric and 3-decomposable geometric drawings of  $K_n$ . *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1240 – 1258, 2010.
- [2] Bernardo M. Ábrego, Mario Cetina, Silvia Fernández-Merchant, Jesús Leañós, and Gelasio Salazar. On  $\leq k$ -edges, crossings, and halving lines of geometric drawings of  $K_n$ . *Discrete and Computational Geometry*, 48(1):192–215, 2012.
- [3] Bernardo M. Ábrego and Silvia Fernández-merchant. Geometric drawings of  $K_n$  with few crossings. *J. Combin. Theory Ser. A*, 114:373–379.
- [4] Bernardo M. Ábrego and Silvia Fernández-merchant. A lower bound for the rectilinear crossing number. *Graphs and Combinatorics*, 21:293–300, 2003.
- [5] Oswin Aichholzer. On the rectilinear crossing number. <http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/research/rp/triangulations/crossing/>, 2011.
- [6] Oswin Aichholzer, Jesús Garcia, David Orden, and Pedro Ramos. New lower bounds for the number of  $\leq k$ -edges and the rectilinear crossing number of  $K_n$ , discrete comput. *Geom*, pages 1–14.
- [7] Lowell Beineke and Robin Wilson. The early history of the brick factory problem. *The Mathematical Intelligencer*, 32(2):41–48, 2010.
- [8] Daniel Bienstock and Nathaniel Dean. Bounds for rectilinear crossing numbers. *Journal of Graph Theory*, 17(3):333–348, 1993.
- [9] J. Blazek and M. Koman. A minimal problem concerning complete plane graphs. *Theory of Graphs and Its Applications*, pages 113–117, 1964.
- [10] T.H. Cormen. *Introduction to Algorithms*. Mit Press, 2009.
- [11] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

- [12] David Eppstein. Sets of points with many halving lines. Technical Report 92-86, Univ. of California, Irvine, Dept. of Information and Computer Science, Irvine, CA, 92697-3425, USA, 1992.
- [13] Ruy Fabila and Jorge López. Computational search of small point sets with small rectilinear crossing number. In *Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry (MCDMCG)*, pages 117–121, 2013.
- [14] Jacob E Goodman and Richard Pollack. On the combinatorial classification of nondegenerate configurations in the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29(2):220 – 235, 1980.
- [15] R.K. Guy. *The Decline and Fall of Zarankiewicz’s Theorem*. Research paper. University of Calgary, Department of Mathematics, 1968.
- [16] Frank Harary and Anthony Hill. On the number of crossings in a complete graph. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 13:333–338, 12 1963.
- [17] U. Wagner E. Welzl L. Lovász, K. Vesztergombi. Convex quadrilaterals and k-sets. *Contemporary Mathematics*, pages 139–148, 2004.
- [18] L. Lovász. On the number of halving lines. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math*, 14:107–108, 1971.
- [19] A. Simmons E. G. Straus P. Erdős, L. Lovász. Dissection graphs of planar point sets. *A survey of Combinatorial Theory*, pages 139–149, 1973.
- [20] R. Guy P. Erdős. Crossing number problems. *American Mathematical Monthly*, 88:52–58, 1973.
- [21] Richard E. Pfeifer. The historical development of J. J. Sylvester’s four point problem. *Mathematics Magazine*, 62(5):309–317, 1989.
- [22] Franco P. Preparata and Michael I. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1985.
- [23] Edward R. Scheinerman and Herbert Wilf. The rectilinear crossing number of a complete graph and Sylvester’s four point problem of geometric probability. *American Mathematical Monthly*, 101:939–943, 1994.
- [24] Paul Turán. A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, 1(1):7–9, 1977.
- [25] D. R. Woodall. Cyclic-order graphs and zarankiewicz’s crossing-number conjecture. *Journal of Graph Theory*, 17(6):657–671, 1993.
- [26] Casimir Zarankiewicz. On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fundamenta Mathematicae*, 41(1):137–145, 1955.